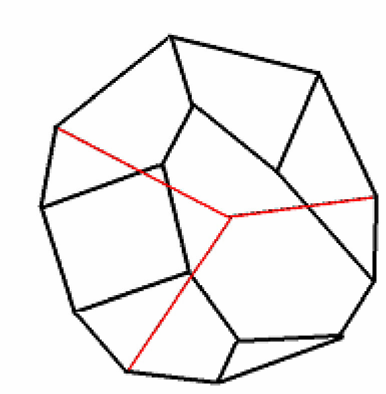
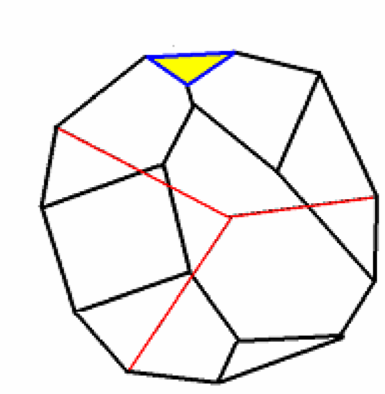
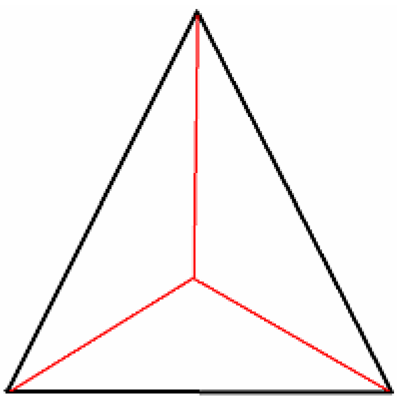
SAJTOÉDEREK

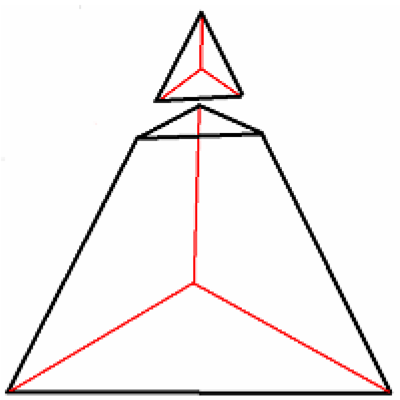
Vegyünk kézbe egy darab sajtot, és kezdjük el egy késsel darabolni! Egynéhány vágás után egy érdekes poliédert kapunk. Ezt néhány valahányszögű síklap határolja, és az egyetlen érdekessége az, hogy minden csúcsában pontosan 3 él találkozik. Ez annak köszönhető, hogy kicsi a valószínűsége annak, hogy a vágás során a kés épp egy már meglévő csúcson halad át. Ezek után definiáljuk a sajtoédert úgy, mint olyan, a gömbbel homeomorf poliédert, amelynek minden csúcsában 3 él találkozik. Az 1. ábrán egy ilyen jószág látható.


1. ábra.

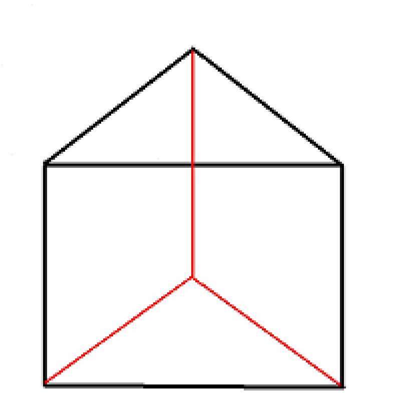

2. ábra.

A 2. ábrán ebből a sajtoéderből levágtunk egy sarkot, így egy újabb sajtoédert nyertünk. A darabolásnál csak egy szabályt kell betartani: a metsző sík soha ne menjen át egy már meglévő csúcson. Így a levágott darab maga is sajtoéder. A 2. ábrán pl. egy tetraédert távolítottunk el. A tetraéder a legkisebb, legegyszerűbb sajtoéder: 3. ábra. Ennek levághatjuk egyik csúcsát, ekkor leesik egy kis tetraéder, és nyerünk egy új alakzatot, a háromszögletű hasábbal homeomorf csonkagúlát vagy prizmát: 4. ábra.

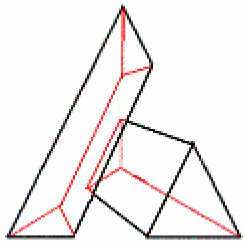

3. ábra.


4. ábra.

A továbbiakban két sajtoédert izomorfnak tekintünk, ha topológiai transzformációkkal, azaz nyújtásokkal, forgatásokkal és tükrözésekkel egymásba vihetők. Így a 4. ábrán látható prizma izomorf az 5. ábrán

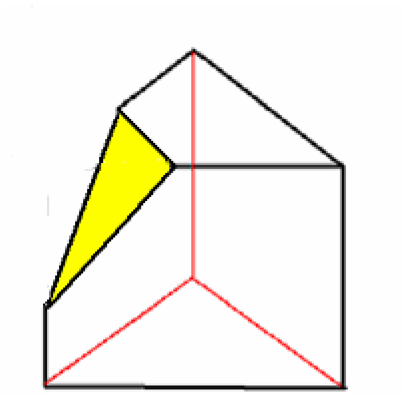


5. ábra.

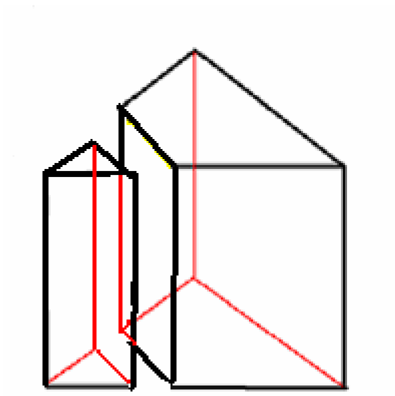


6. ábra.

látható háromszögletű hasábbal. A tetraédert egy élével párhuzamos síkkal is kettévághatunk, vagy másképpen úgy mondjuk hogy levághatjuk egy élét is.
Ez látható a 6. ábrán. Amint látjuk, így két háromszögletű hasábot kapunk. Ezzel azonban ki is merítettük a tetraéder lehetőségeit.l Ahhoz hogy újabb alakzatokat nyerjünk, a hasábot kell tovább darabolnunk. A hasáb 5 oldalú, és izomorfiától eltekintve ez az egyetlen ötoldalú sajtoéder. Hatoldalúból már több is lesz.

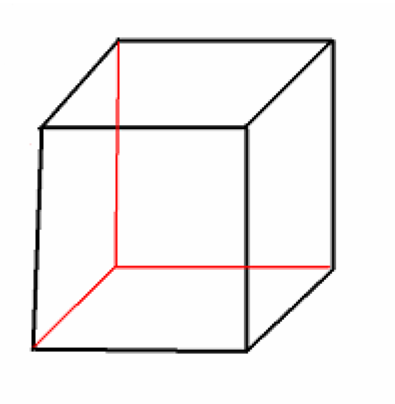


7. ábra.

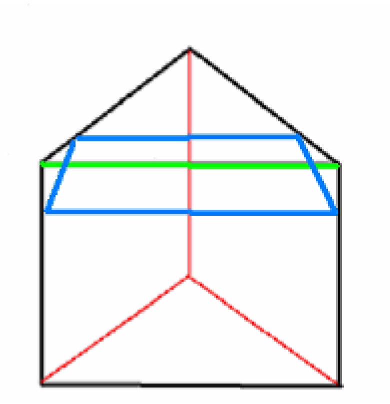


8. ábra.

A 7. ábrán egy sarkot vágtunk le (így egy kis tetraéder esett le) és a nyert idom két háromszögből, két négyszögből és két ötszögből áll. Jelöljük ezért ezt az alakzatot így: (3,3,4,4,5,5). A számok azt mutatják, hogy az egyes oldalak hány szögűek. Ez a jelölés nem lesz mindig egyértelmű, lesznek olyan párok amelyek jelölése ugyanaz, mégsem izomorfak. Nevezzük ezeket izomereknek! Az oldalak számának növelésével az izomerek száma is rohamosan nő.
A 8. ábrán egy élet vágtunk le, és így egy új alakzatot nyertünk, a kockát. 9 ábra.

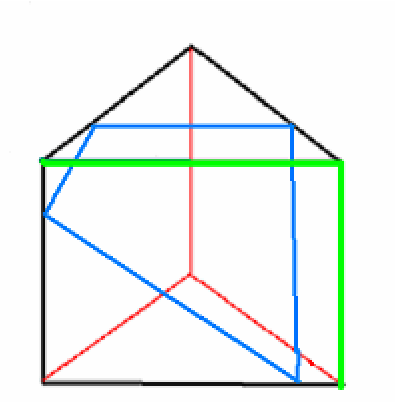


9. ábra.

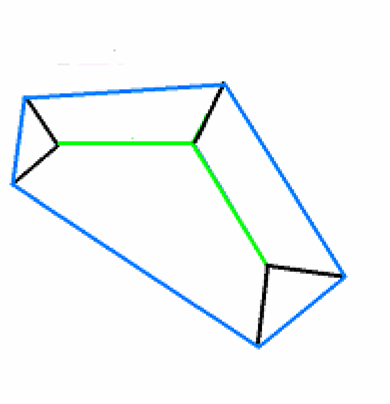


10. ábra.

Levághatom a hasábnak egy másik élét is a kék metszősíkkal: 10. ábra. Ekkor a maradék a (3,3,4,4,5,5) testtel lesz izomorf.
Mód van arra is hogy két élet vágjak le a kék metszősíkkal: 11. ábra. Ekkor valójában a 12. ábrán látható (3,3,4,4,5,5) testet távolítjuk el.

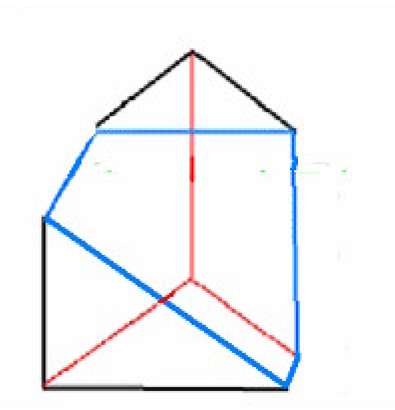


11. ábra.

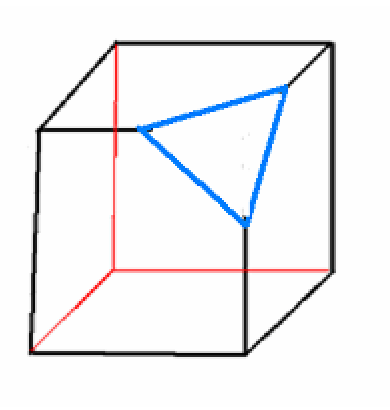


12. ábra.

A maradék a 13. ábrán látható, ugyanezzel izomorf test. Háromszögletű hasábból egyebet nem is nyerhetünk tehát, így két 6 oldalú sajtoéderünk van, a kocka, azaz a (4,4,4,4,4,4) és a (3,3,4,4,5,5) test.

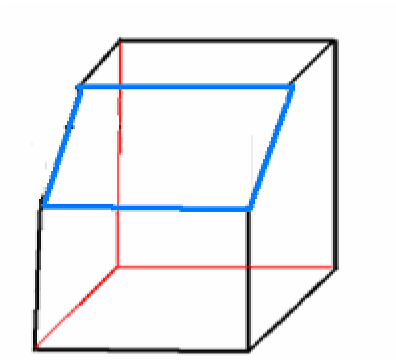


13. ábra.

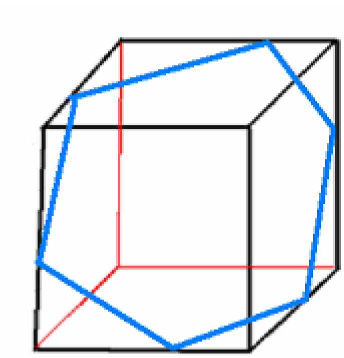


14. ábra.

Új sajtoédereket a kocka metszegetésével nyerünk: 14. ábra = (3,4,4,4,5,5,5).
Itt egy csúcsot vágtunk le. 15. ábra = (4,4,4,4,4,5,5) = ötszögletű hasáb.

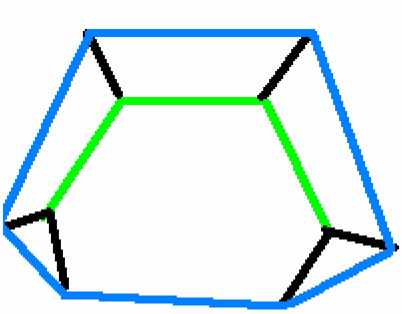


15. ábra.

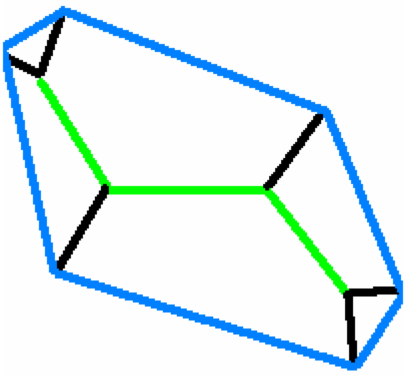


16. ábra.

A 16. ábrán a kockát egy hatszöggel két egyforma darabra vágtuk. Az így nyert test a (3,3,3,5,5,5,6) , ami nem egyéb mint 3, egy pontban összefutó él levágása.



17. ábra.



18. ábra.

Levághatunk 3 egyirányba kanyarodó élet is, így nyerjük a 17. ábrát, ami a (3,3,4,4,4,6,6) test, és levághatunki 3 különböző irányba kanyarodó élet is, ez a 18. ábra, a (3,3,4,4,5,5,6) test. Az az érzésem hogy több hétoldalú nincs is.

Matematikai összefüggések is vannak a sajtoéderekre, hiszen az Euler-képlet igaz rájuk is: lap + csúcs = él + 2. Legyen a lapok száma n, és ezek n_1, n_2, n_3… szögűek. Ekkor $(n_1+ n_2+ n_3…)/2$ él van és $(n_1+ n_2+ n_3…)/3$ csúcs, az összefüggés tehát $n + (n_1+ n_2+ n_3…)/3 = (n_1+ n_2+ n_3…)/2 + 2$, azaz
$6n – 12 = (n_1+ n_2+ n_3…)$. Ha most megadom n-et, akkor megkapom, elvileg hányféle sajtoéder lehet n-re. Nyilván nem minden változat fog tényleges testként realizálódni.

n = 4 : 6∗4 – 12 = 24 – 12 = 12 = 4+4+4+4 és ez az egyetlen lehetőség.

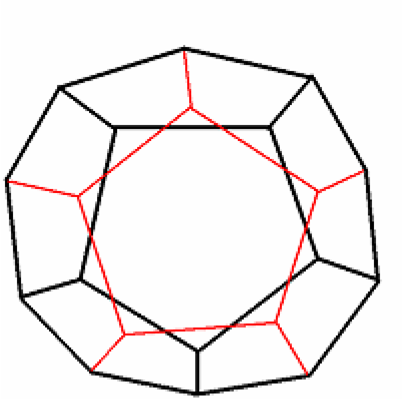
n = 5: 6∗5 – 12 = 30 – 12 = 18 = 3+3+4+4+4 = 3+3+3+4+5 . Itt csak az

elsőből lesz test, a második lehetőség nem valósul meg.

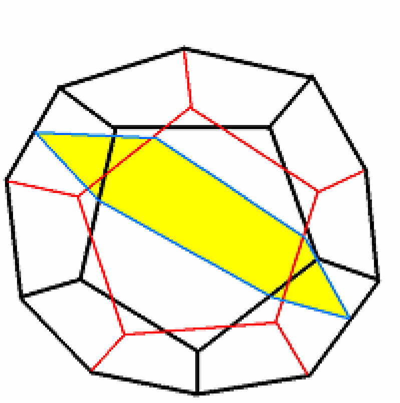
n = 6 : 6∗6 – 12 = 36 – 12 = 24 = 4+4+4+4+4+4 = 3+3+4+4+5+5 =

= 3+4+4+4+4+5 = még sok lehetőség, de itt is csak az első kettőből lesz test.

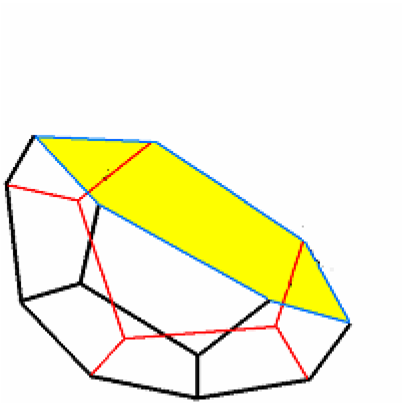
Szétvághatunk egy sajtoédert úgy is, hogy mindkét darab kisebb lapszámú legyen. Ez a maghasadásra emlékeztet. Pl. a pentagondodekaéder (19. ábra) nyilván sajtoéder. Ha a dodekaédert a 20. ábrán látható síkkal két egyforma darabra vágjuk, akkor a 21. és 22. ábrán látható 10 oldalú testeket kapjuk.



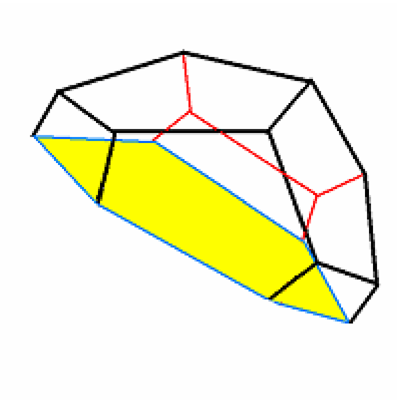
19. ábra.



20. ábra.

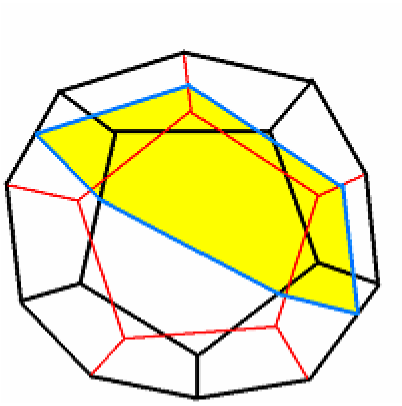


21. ábra.

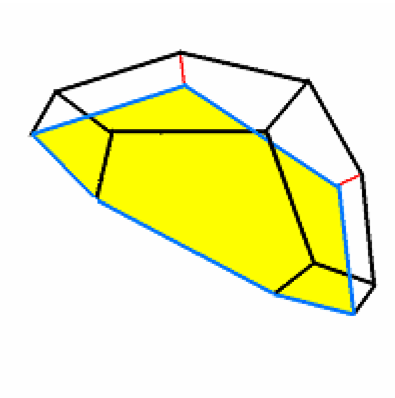


22. ábra.

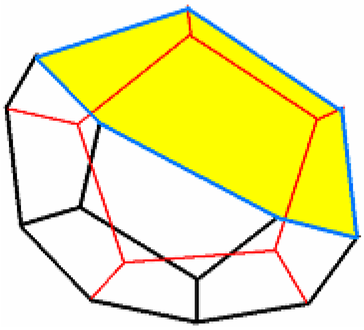
Ha a dodekaéderről két egész lapot levágunk a 23. ábrán látható síkkal, akkor a 24. ábrán látható 9 lapú és a 25. ábrán látható 11 lapú testet kapjuk.

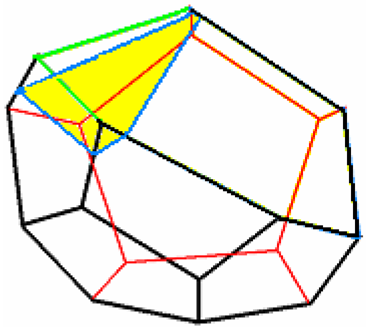


23. ábra.



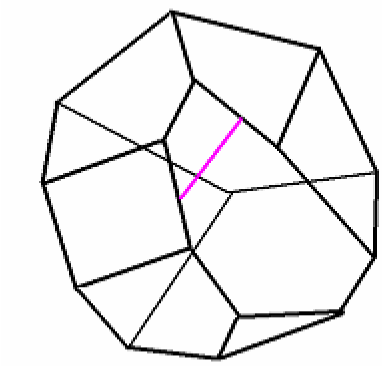
24. ábra.

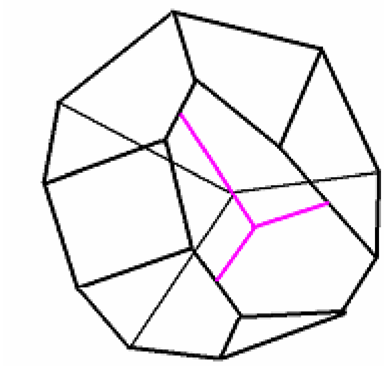

25. ábra.


26. ábra.

Ha a 11 oldalúról a 26. ábra szerinti két zöld élet levágom, visszanyerem a dodekaédert, legalábbis izomorfia erejéig. Ezek szerint darabolással az egyes sajtoéderek egymásba alakíthatók, illetve egymásból felépíthetők. Kiindulunk a legegyszerűbből, a tetraéderből, és darabolással egyre nagyobb lapszámú sajtoédert kapunk. Így egy labirintust, irányított gráfot nyerünk, melynek csúcsai a sajtoéderek, és ha egyikből egy másik darabolással előállítható, akkor a két csúcsot egy nyíl kösse össze, amely a kiinduló sajtoéderből mutat az eredmény sajtoéder felé. Láttuk, hogy ezen a gráfon hurkok is vannak, körbe is lehet menni. Vajon ez a gráf teljesen összefüggő, vagy vannak izolált szigetei is? Szerintem összefüggő. Lehet hogy a bizonyítás is egyszerű. Egy sajtoéderből egy csúcs levágásával mindig lehet eggyel nagyobb oldalszámú sajtoédert előállítani, „fölfelé menő út” tehát mindig van. Egy csúcs levágása egy tetraédert jelent, tehát a tetraéderhez minden sajtoédertől vezet út. És ezzel kész is, a tetraéder az összekötő kapocs. Ha van izolált sziget, akkor annak van legkisebb oldalszámú eleme is, és ezt nem lehet kisebb darabokra vágni. Ez azonban nyilván nem igaz, mert tetraédert mindig le lehet vágni.

Ha a sajtoédert topológiai alakzatnak, gömbre rajzolt gráfnak tekintem, akkor a darabolás mellett egy másik művelet is végezhető vele: újabb élek és csúcsok beillesztése. Az 1. ábrán látható sajtoéder két élének középpontját összekötve egy újabb élet illesztek be. Így kapom a 27. ábrát.

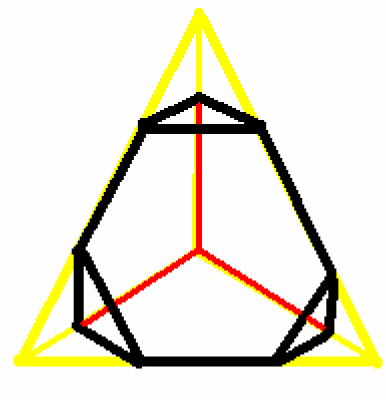

27. ábra.

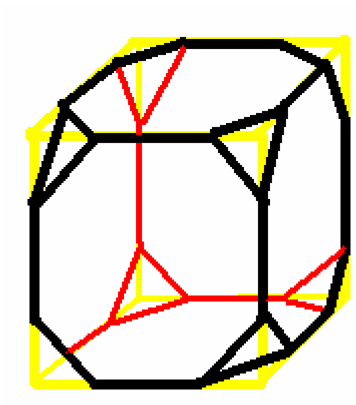

28. ábra.

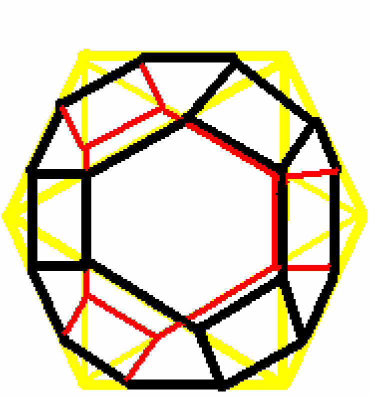
Ha egy lapközépből 3 élközéphez vonalat húzok, akkor a 28. ábrát kapom.
A 27. ábrán az élek száma 3-mal, a csúcsok száma 2-vel, a lapok száma 1-gyel nő. A 28. ábrán az élek száma 6-tal, a csúcsok száma 4-gyel, a lapok száma 2-vel nő. Ezzel a két művelettel két új labirintust definiálhatok. Itt csak fölfelé tudunk lépkedni, de ha a műveletek inverzét is definiálom, akkor már tudunk lefelé is menni. Mindkét művelet ekvivalens egy megfelelő metszéssel: az első műveletnél egy, a másodiknál három síkkal metszünk. Így akkor ezek nem is igazán új műveletek. Viszont grafikailag szemléletesebbek, könnyebb őket elképzelni, nem igényelnek olyan kifinomult térszemléletet. A gömbre rajzolható gráf síkban is lerajzolható, és elemezhető, bár így két gráf izomorfiáját elég nehéz eldönteni.

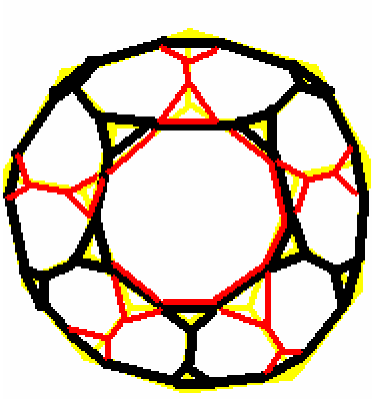
Szabályos sajtoéderek

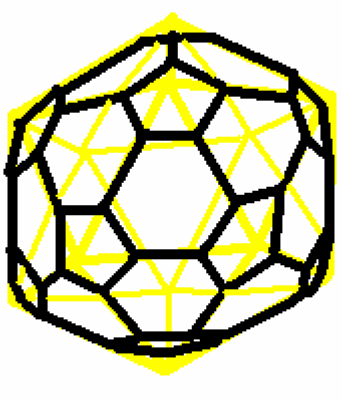
A platóni testek közül a tetraéder, a kocka és a dodekaéder már maga sajtoéder. Egyébként pedig úgy kaphatunk sajtoédereket, hogy a 3-nál magasabb rendű csúcsokat levágjuk. Így tetraéderből kapjuk a 29. ábrát, kockából a 30. ábrát, oktaéderből a 31. ábrát, dodekaéderből a 32. ábrát és ikozaéderből a 33. ábrát.

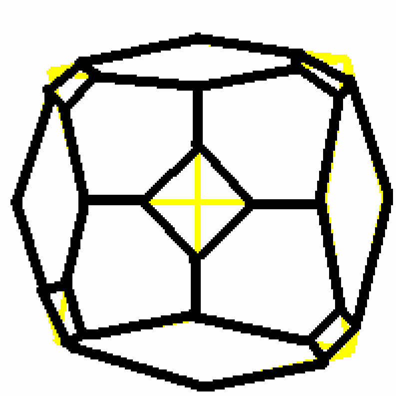

29. ábra.


30. ábra.


31. ábra.


32. ábra.


33. ábra.


34. ábra.

Félszabályos testekből is csinálhatunk sajtoédert, ilyen a 34. ábra ahol rombdodekaéder 4-es csúcsait vágtuk le. Sajtoéder családokat is kialakíthatunk. Kiindulunk egy sajtoéderből, annak levágjuk az összes csúcsát, így kapjuk a következő sajtoédert. Ezzel az eljárással az n oldalú sokszögből 2n oldalú sokszög lesz, és emellett megjelenik annyi háromszög, ahány csúcsa volt a kiinduló sajtoédernek. Tetraéder -> 29. ábra, 4 hatszög, 4 háromszög, és 12 csúcs. -> 4 12-szög, 4 hatszög, 12 háromszög és 36 csúcs. Láthatjuk hogy a csúcsok száma megháromszorozódik. Hány oldala lesz egy ilyen testnek?
4, 4+4, 4+4+12, 4+4+12+36, 4+4+12+36+108, … azaz 4, 8, 20, 56, 164…
ez a sorozat ez idáig benne sincs a Sloane katalógusban! Úgyhogy betettem én, ez lett az A115099 sorozat.

http://www.research.att.com/~njas/sequences/

4+4*(1+3+9+27…) = 4+4*(3^n-1)/2 = 2+2*(3^n) tehát még formula is van rá!

A kockából kiindulva: 6 db négyzet, 8 db csúcs -> 6 db nyolcszög, 8 db háromszög, 24 csúcs -> 6 db 16-szög, 8 db hatszög, 24 háromszög, 72 csúcs.
6+8+24+72+… = 6+8*(1+3+9+27…) = 6+8*(3^n-1)/2 = 2+4*(3^n).
Ez lesz a 6,14,38,110,326… sorozat, és ez már benne van! A079003.
De valahogy egész másként származtatják.

FORMULA `a(1)=3; for n>1, a(n)=3*a(n-1)-4; a(n)=4*3^(n-1)+2`

Least x>=3 such that F(x)==-1 (mod 3^n) where F(x) denote the x-th Fibonacci number (A000045).

Megjegyzésként beírhatom ezt a sajtoéderes származtatást is persze.

Mi lesz az oktaéderből? 8 háromszög 6 csúcs, ez még nem sajtoéder.
-> 8 hatszög, 6 négyzet, 24 csúcs, voltaképpen ez a kiinduló test.
-> 8 12-szög, 6 nyolcszög, 24 háromszög, 72 csúcs.
8+6+24+72+… = 14+24*(1+3+9+27…) = 6+8*(1+3+9+27…) de hát ez ugyanaz mint a kockánál volt! De a kapott sajtoéderek mégse izomorfak, más poligon lesz az oldaluk.