A SZIMBÓLIKUS HATVÁNYOZÁS

Ez egy olyan módszer, amit már a Bernoulli-számoknál is alkalmaztunk. Emlékezzünk vissza:

Egy x szám hatványán az $x^n = x \cdot x \cdot x \cdot x \ldots x$ szorzatot értjük, ahol éppen n darab x-et szorzunk össze. Ez a hatvány megszokott jelentése. Mi azonban bevezetjük a szimbólikus hatványozást: eszerint egy A szimbólum hatványain az $A^n = a_n$ számsorozatot értjük, ahol az a_n számok tetszőlegesek lehetnek, nem kell hogy egy rögzített számból kapjuk őket szorozgatással! Itt is érvényesek a hatványozás azonosságai, azaz $A^n \cdot A^m = A^{n+m}$. Fontos kihangsúlyozni, hogy eszerint $A^n \cdot A^m$ jelentése nem $a_n \cdot a_m$, hanem a_{n+m} , azaz a sorozat n+m-edik eleme. Ha x szám, és A az előbb ismertetett szimbólum, akkor érvényes a következő azonosság: $(x \cdot A)^n = x^n \cdot A^n = x^n \cdot a_n$,ahol x^n az x n-edik hatványa a megszokott értelemben, a_n pedig a sorozat n-edik eleme.

$(a + b)^n = (n\ 0) \cdot a^0 \cdot b^n + (n\ 1) \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + (n\ 2) \cdot a^2 \cdot b^{n-2} + \ldots + (n\ n) \cdot a^n \cdot b^0$:
ez az ismert Binomiális összefüggés. A Binomiális együtthatókat (n k) alakban írtam fel. Ha az összefüggésünk egyik tagja szám, a másik tagja pedig az A szimbólum, akkor az összefüggés így alakul:
$(A + b)^n = (n\ 0) \cdot A^0 \cdot b^n + (n\ 1) \cdot A^1 \cdot b^{n-1} + (n\ 2) \cdot A^2 \cdot b^{n-2} + \ldots + (n\ n) \cdot A^n \cdot b^0$,
ami az A szimbólum értelmezéséből fakadóan a következő alakot ölti:
$(A + b)^n = (n\ 0) \cdot a_0 \cdot b^n + (n\ 1) \cdot a_1 \cdot b^{n-1} + (n\ 2) \cdot a_2 \cdot b^{n-2} + \ldots + (n\ n) \cdot a_n \cdot b^0$:
Itt b^n a b szám megszokott hatványa, az a_n pedig a sorozat n-ik eleme.

Ezzel a művelettel nagyon sok érdekes matematikai összefüggést nyerhetünk.

Először számoljuk ki az e^e számot! Ezt az ismert Taylor sorral végezhetjük:

$e^e = 1 + e/1! + e^2/2! + e^3/3! + \ldots = 1 + 1/1!\,(1+1/1!+1/2!+1/3!+\ldots) + 1/2!\,(1+2/1!+2^2/2!+ 2^3/3!+\ldots) + 1/3!\,(1+3/1!+3^2/2!+3^3/3!+\ldots) + 1/3!\,(1+4/1!+4^2/2!+4^3/3!+\ldots) + \ldots$

Ezt most csoportosítsuk úgy, hogy minden zárójelből először az első tagokat veszem, aztán a másodikat, aztán a harmadikat, stb:

$e^e = (1+1/1!+1/2!+1/3!+\ldots) + 1/1!\,(1/1!+2/2!+3/3!+4/4!+\ldots) + 1/2!\,(1^2/1!+2^2/2!+3^2/3!+\ldots) + 1/3!\,(1^3/1!+2^3/2!+3^3/3!+\ldots) + 1/4!\,(1^4/1!+2^4/2!+3^4/3!+\ldots) + \ldots =$

$= (1+1/1!+1/2!+1/3!+\ldots) + 1/1!\,(1+1/1!+1/2!+1/3!+\ldots) + 1/2!\,(1+2/1!+3/2!+4/3!+\ldots) + 1/3!\,(1+2^2/1!+3^2/2!+ 4^2/3!+\ldots) + 1/4!\,(1+2^3/1!+3^3/2!+ 4^3/3!+\ldots) + \ldots$

Na most csak az a kérdés, hogy mennyi $\Sigma\, k^n/(k-1)!$ értéke. Ehhez némi függvénytani ismeret kell. Képezzük az $f(x) \rightarrow (xf(x))'$ függvénysorozatot úgy, hogy az $f_0(x) = e^x$ függvényből indulunk ki! És nézzük meg az x=1 helyen!

$e^x = 1+x/1!+x^2/2!+x^3/3!+\ldots$ értéke az x=1 helyen $1+1/1!+1^2/2!+1^3/3!+\ldots = e$.
$xe^x = x+ x^2/1!+x^3/2!+x^4/3!+\ldots$
$(xe^x)' = 1+ 2x/1!+3x^2/2!+4x^3/3!+\ldots$ értéke az x=1 helyen $1+2/1!+3/2!+4/3!+\ldots$
$(xe^x)' = (1+x)e^x$, általában $(xp(x)e^x)' = ((1+x)p(x)+xp'(x))e^x$ lesz.

$(xe^x)' = (1+x)e^x$, értéke az x=1 helyen 2e.
$(x(1+x)e^x)' = ((1+x)(1+x)+x(1+x)')e^x = ((1+2x+x^2)+x)e^x = (1+3x+x^2)e^x$
$(x(1+x)e^x)' = 1+2^2x/1!+3^2x^2/2!+ 4^2 x^3/3!+\ldots$ értéke az x=1 helyen
$1+2^2/1!+3^2/2!+ 4^2/3!+\ldots = (1+3+1)e = 5e$

Általában:
$f_n(x) = 1+2^nx/1!+3^nx^2/2!+ 4^n x^3/3!+\ldots = p_n (x) e^x$
$xf_n(x) = x+2^n x^2/1!+3^nx^3/2!+ 4^n x^4/3!+\ldots = xp_n (x) e^x$
$(xf_n(x))'=1+2^n 2x/1!+3^n3x^2/2!+4^n 4x^3/3!+\ldots =(xp_n (x) e^x)' =((1+x) p_n (x)+xp_n'(x)) e^x = p_{n+1} (x)$
Azaz $p_{n+1} (x) =1+2^{n+1} x/1!+3^{n+1}x^2/2!+4^{n+1}x^3/3!+\ldots$

Ezen függvények értéke az x=1 helyen $p_n (1)$ e lesz.
$p_0 (x)=1$, $p_1 (x)=1+x$, $p_2 (x)=1+3x+ x^2$, $p_3 (x)=1+7x+6x^2+x^3$, stb.
Ha $p_n (x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots$ akkor
$p_{n+1} (x) = x p_n (x) + (xp_n (x))'$ a következő lesz:
$(x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + a_4 x^5 + a_5 x^6 + ..) + (1 + 2a_1 x + 3a_2 x^2 + 4a_3 x^3 + 5a_4 x^4 + 6a_5 x^5 + ..)$
$= (1 +(1+2a_1)x+(a_1+3a_2) x^2+(a_2+4a_3) x^3+(a_3+5a_4) x^4 + \ldots+(a_{n-1}+n+1) x^n + x^{n+1}$
Látjuk hogy az $a_0 =1$ és az $a_n =1$ jelleg megőrződik.
Tehát ha a $p_n (x)$ együtthatói $1 , a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 \ldots$, akkor
a $p_{n+1} (x)$ együtthatói $1 , 1+2a_1 , a_1+3a_2 , a_2 +4a_3 , a_3 +5a_4 , a_4 +6a_5 \ldots$ lesz.

$p_n (x)$ –eket egy Pascal – háromszögbe rendezhetjük:

	Az együtthatók:	
1	1	1
$1 + x$	1 1	2
$1 + 3x + x^2$	1 3 1	5
$1 + 7x + 6 x^2 + x^3$	1 7 6 1	15
$1 + 15x + 25 x^2 + 10 x^3 + x^4$	1 15 25 10 1	52
$1 + 31x + 90 x^2 + 65 x^3 + 15 x^4 + x^5$	1 31 90 65 15 1	203

Ezt úgy hívják, hogy Stirling-féle partíciós számok, és {n , k} –val jelölik.
Így pl. {4 , 2} = 7, {5 , 3} = 25, stb. A jobb szélen a sorösszegeket tüntettem fel.
Ez a sorozat játssza most a főszerepet: 1, 2, 5, 15, 52, 203, … Ezt a sorozatot elnevezem
α_n sorozatnak, azaz $\alpha_1 =1$, $\alpha_2 =2$, $\alpha_3 =5$, $\alpha_4 =15$, $\alpha_5 =52$, $\alpha_6 =203$, stb.

A Pascal háromszögben két egymás melletti szám összege az alattuk levő szám lesz.
Pl. (5 , 1)+(5 , 2)=5+10=15=(6 , 2). Általában (n , k)+(n , k+1)=(n+1 , k+1).
Hasonló igaz itt is, egy kis csavarintással: {4 , 2} = 7 , {4 , 3} = 6 , {5 , 3} = 25 .
7 + 3 ·6 = 7 + 18 = 25 . Általában: {n , k} + (k+1) ·{n , k+1} = {n+1 , k+1}
Ezzel egy rekurziós szabályt kaptunk a Stirling háromszög generálására.
Van rekurziós szabály az α_n számok generálására is: ezt a szimbólikus hatvány nyelvén így lehet megfogalmazni: $(1 + \alpha)^n = \alpha_{n+1}$. Kiírva az első néhány esetet:
$\alpha_0 =1$. $(1 + \alpha)^0 = 1 = \alpha_1$. $\alpha_1 + \alpha_0 = \alpha_2 =1+1=2$. $\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 =1+2\cdot1+2=5$.
$\alpha_0 + 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_4 = 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 = 15$.
$\alpha_0 + 4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 4\alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_5 = 1 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 15 = 1 + 4 + 12 + 20 + 15 = 52$.
A rekurziót folytatva megkapjuk az összes α_n számot.

Az α_n sorozat a Sloane-katalógusban A000110 számon szerepel, és így adja meg:

1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, 678570, 4213597, 27644437, 190899322, 1382958545, 10480142147, 82864869804, 682076806159, 5832742205057, 51724158235372, 474869816156751, 4506715738447323

A sorozat az $\alpha_0 = 1$ értékkel indul.

A Sloane katalógusba a következő címen lehet belépni:

http://www.research.att.com/~njas/sequences/

Látjuk, hogy ez a sorozat meglehetősen gyorsan növekszik, gyorsabb mint az exponenciális. Na most hogy kapjuk meg ebből az e^e értékét?

$p_n(1) = \alpha_n$, tehát $\Sigma\, k^n/(k-1)! = p_n(1)\, e = e\, \alpha_n$ lesz.

$e^e = e + 1/1!\, e + 1/2!\, 2e + 1/3!\, 5e + 1/4!\, 15e + 1/5!\, 52e + 1/6!\, 203e + \ldots$

az e-t ki lehet emelni, így $e^e = e\,(1 + 1/1! + 2/2! + 5/3! + 15/4! + 52/5! + 203/\,6! + \ldots)$

Akkor pedig $e^{e-1} = 1 + 1/1! + 2/2! + 5/3! + 15/4! + 52/5! + 203/\,6! + \ldots$

Hogy írható fel ez az α_n szimbólummal?

$e^{e-1} = \alpha_0 + \alpha_1\,/1! + \alpha_2\,/2! + \alpha_3\,/3! + \ldots = \Sigma\ \alpha_n\,/n! = \Sigma\, \alpha^n\,/n! = e^{\alpha}$

ahol alkalmaztuk a szimbólikus hatványozás jelölését!

$e^e = \Sigma\, e^n\,/n! = 1/e\; e^{\alpha}$.

Legyen most $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots$
Ekkor $f(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 + a_4 n^4 + a_5 n^5 + \ldots$
$\Sigma\ f(n)/n! = a_0 \Sigma\, 1/n! + a_1 \Sigma\, n/n! + a_2 \Sigma\, n^2\,/n! + a_3 \Sigma\, n^3\,/n! + a_4 \Sigma\, n^4\,/n! + \ldots$

Most alkalmazzuk a $\Sigma\, k^n/(k-1)! = p_n(1)\, e = e\, \alpha_n$ formulát:

$\Sigma\ f(n)/n! = a_0\, e + a_1\, \alpha_1 e + a_2\, \alpha_2 e + a_3\, \alpha_3 e + a_4\, \alpha_4 e + \ldots = e(a_0 + a_1\, \alpha_1 + a_2\, \alpha_2 + a_3\, \alpha_3 + a_4\, \alpha_4 + \ldots)$

Most ismét alkalmazhatjuk az $\alpha_n = \alpha^n$ szimbólikus hatványozást, és ezzel ezt kapjuk:

$\Sigma\ f(n)/n! = e\, f(\alpha)$. Na ezért a csodaformuláért küszködtünk idáig!

Ezzel csodálatos felismerések válnak lehetővé.

Most sorra behelyettesítünk f(n) helyére minden ismert függvényt, és megnézzük, mit kapunk. Kezdjük először az ismerttel:

f(n) = e^{n} : $\Sigma\, e^{n}/n! = e\cdot e^{\alpha} = e^{e}$, **tehát** $e^{e-1} = e^{\alpha} = \Sigma\, \alpha^{n}/n!$

Ez a szimbólikus hatvány értelmezése szerint így írható:

$\Sigma\, \alpha_n/n! = 1 + \alpha_1/1! + \alpha_2/2! + \ldots = 1 + 1/1! + 2/2! + 5/3! + 15/4! + 52/5! + \ldots$

Számszerűen $e^{e-1} = 5.5749415351\ldots = 1 + 1 + 1 + 5/6 + 15/24 + 52/120 + \ldots$

Ennek az első 6 tagnak az összege 4.8916666… láthatóan közelíti az 5.57…-et.

Idézzünk még el egy kicsit a Stirling háromszögnél. Bontsuk fel az 52 és a 203 számokat!

52 = 1 + 10 + 25 + 15 + 1 = 1 + (1+2+3+4) + (1+2(1+2)+3(1+2+3)) + (1+2(1+2(1+2))) + 1

203 = 1 + 15 + 65 + 90 + 31 + 1 = 1 + (1+2+3+4+5) + (1+2(1+2)+3(1+2+3)+4(1+2+3+4)) + + (1+2(1+2(1+2))+3(1+2(1+2)+3(1+2+3))) + (1+2(1+2(1+2(1+2)))) + 1 .

Aranyosak ezek a kifejtések, sok érdekes szabály látszik.

Tegyünk most bele f(n)-be x-et! Megtehetjük, mert n szempontjából x csak egy állandó.

Legyen most f(n) = e^{nx} **:**

$\Sigma\, e^{nx}/n! = e\cdot e^{\alpha x} = e^{e^{x}}$, **tehát** $e^{e^{x}-1} = e^{\alpha x} = \Sigma\, \alpha^{n} x^{n}/n!$

Ez a szimbólikus hatvány értelmezése szerint így írható:

$\Sigma\, \alpha_n x^{n}/n! = 1 + \alpha_1 x/1! + \alpha_2 x^{2}/2! + \ldots = 1 + x/1! + 2x^{2}/2! + 5x^{3}/3! + 15x^{4}/4! + 52x^{5}/5! + \ldots$

Legyen most f(n) = x^{n} **:**

$\Sigma\, x^{n}/n! = e^{x} = e\cdot x^{\alpha} = e\cdot e^{\ln x\cdot\alpha} = e\,(1 + 1\cdot\ln x + 2\cdot(\ln x)^{2}/2! + 5\cdot(\ln x)^{3}/3! + 15\cdot(\ln x)^{4}/4! + \ldots)$

Akkor pedig $e^{x-1} = 1 + 1\cdot\ln x + 2\cdot(\ln x)^{2}/2! + 5\cdot(\ln x)^{3}/3! + 15\cdot(\ln x)^{4}/4! + \ldots$

Speciálisan pl. $e^{x-1} = e = 1 + 1\cdot\ln 2 + 2\cdot(\ln 2)^{2}/2! + 5\cdot(\ln 2)^{3}/3! + 15\cdot(\ln 2)^{4}/4! + \ldots$

Tudjuk, hogy $e^{\alpha x} = \Sigma\, \alpha^{n} x^{n}/n! = e^{e^{x}-1}$ **. Kérdés: mi sin(αx) ?**

$\sin(\alpha x) = (e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x})/2i = (e^{e^{ix}-1} - e^{e^{-ix}-1})/2i$

Most írjuk ki, hogy $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ **:**

$(e^{e^{ix}-1} - e^{e^{-ix}-1})/2i = (e^{\cos x + i\sin x - 1} - e^{\cos x - i\sin x - 1})/2i = e^{\cos x - 1}\cdot\sin(\sin x)$

Kaptuk tehát: $\sin(\alpha x) = e^{\cos x - 1}\cdot\sin(\sin x) =$

$= \alpha_1 x/1! - \alpha_3 x^{3}/3! + \alpha_5 x^{5}/5! - \alpha_7 x^{7}/7! + \ldots = x/1! - 5x^{3}/3! + 52x^{5}/5! - 877x^{7}/7! + \ldots$

Ehhez hasonlóan kapjuk meg cos(αx) –et :

$\cos(\alpha x) = (e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x})/2 = (e^{e^{ix}-1} + e^{e^{-ix}-1})/2$

Most írjuk ki, hogy $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ **:**

$(e^{e^{ix}-1} + e^{e^{-ix}-1})/2 = (e^{\cos x + i\sin x - 1} + e^{\cos x - i\sin x - 1})/2 = e^{\cos x - 1}\cdot\cos(\sin x)$

Kaptuk tehát: $\cos(\alpha x) = e^{\cos x - 1}\cdot\cos(\sin x) =$

$= 1 - \alpha_2 x^{2}/2! + \alpha_4 x^{4}/4! - \alpha_6 x^{6}/6! + \ldots = 1 - 2x^{2}/2! + 15x^{4}/4! - 203x^{6}/6! + \ldots$

Fazekas Ferenc: Műszaki Matematikai Gyakorlatok A .VIII. : Taylor sorok. 1955.

E könyv 160. oldalán található:

$e^{y\cos x}\cdot\cos(y\sin x) = \Sigma \cos(nx)\, y^n/n!$ **és**
$e^{y\cos x}\cdot\sin(y\sin x) = \Sigma \sin(nx)\, y^n/n!$

Ennek igazolása:
$e^{ye^{ix}} = e^{y\cos x+iy\sin x} = \Sigma y^n e^{inx}/n! = \Sigma y^n(\cos(nx)+i\sin(nx))/n! =$
$= e^{y\cos x}(\cos(y\sin x) + i\sin(y\sin x))$
Az egyenlet valós és képzetes része adja a kívánt állítást.

A mi felírásunkban $e^{ye^{ix}} = \Sigma y^n e^{inx}/n! = \Sigma (ye^{ix})^n/n! = e(ye^x)^\alpha = e\cdot e^{(x+\ln y)\alpha}$
Ez még így is írható: $e^{1+(x+\ln y)\alpha}$

Itt kell egy fontos megjegyzés: Amikor az α formális hatványsorát kiértékeljük, akkor először szorzunk, csak aztán írjuk át α^n -et α_n alakba! $\alpha^n\cdot\alpha^m = \alpha^{n+m}$, de $\alpha_n\cdot\alpha_m$ nem egyenlő α_{n+m} mel! $e^{\alpha x+1} = e\cdot e^{\alpha x}$ **a következőt jelenti:**
$\Sigma (1+\alpha x)^n/n! = e\cdot(\Sigma(\alpha x)^n/n!) = 1 + (1+\alpha x)/1! + (1+\alpha x)^2/2! + (1+\alpha x)^3/3! + \ldots =$
$=1+1+\alpha x+(1+2\alpha x+\alpha^2x^2)/2! + (1+3\alpha x+3\alpha^2x^2+\alpha^3x^3)/3! + (1+4\alpha x+6\alpha^2x^2+4\alpha^3x^3+\alpha^4x^4)/4! +\ldots$
Most már összevonhatjuk az αx azonos kitevőjű tagjait, és azt látjuk, hogy mindből kiemelhető az $1+1/1!+1/2!+1/3!+1/4!+\ldots = e$ tényező. A maradék pedig éppen $\Sigma(\alpha x)^n/n!$. A szorzások elvégzése után átírhatjuk α^n -et α_n alakba, így kapjuk a végeredményt.

Ha $G(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots$ akkor ez így is írható: $G(x) = \Sigma (Ax)^n$, ahol az A szimbólum hatványai az a_n –ek. $\Sigma(Ax)^n = 1/(1 - Ax)$ szimbólikusan. Tehát $G(x) = 1/(1-Ax)$. Ezt a G(x) –et az $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ sorozat generátorfüggvényének nevezzük. Ebből deriválással kaphatjuk meg a sorozat elemeit: $d^n/dx^n\, G(x) = n!\cdot a_n$ az x=0 helyen. Ha $G(x) = 1/(1-Ax)$, akkor ennek deriváltja $G'(x) = A/(1 - Ax)^2$. Másrészt
$G'(x) = 1\cdot a_1 + 2\cdot a_2\cdot x + 3\cdot a_3\cdot x^2 \ldots = \Sigma A^n\cdot n\cdot x^{n-1} = A\cdot\Sigma A^{n-1}\cdot n\cdot x^{n-1} =$
$= A\cdot(A^0 + A^1x + A^2x^2 + A^3x^3 + \ldots)^2 = A\cdot(A^0\cdot A^0 + (A^0\cdot A^1 + A^1\cdot A^0)x + (A^0\cdot A^2 + A^1\cdot A^1 +$
$+ A^2\cdot A^0)x^2 + \ldots = A\cdot(A^0 + 2\cdot A^1\cdot x + 3\cdot A^2\cdot x^2 + \ldots = A^1 + 2\cdot A^2\cdot x + 3\cdot A^3\cdot x^2 + \ldots$ **és most már lehet $A^k = a_k$ átírást alkalmazni. Látjuk hogy a két formula megegyezik.**

Az exponenciális generátorfüggvényt úgy kapjuk, hogy $e^{Ax} = \Sigma A^n\cdot x^n/n! = \Sigma a_n\cdot x^n/n!$.

Az α_n sorozat exponenciális generátorfüggvénye éppen e^{e^x-1} **volt. Ennek deriváltja** $(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x} = e^x e^{e^x-1} = e^x e^{\alpha x} = e^{(1+\alpha)x} = \Sigma\alpha^{n+1}\cdot x^n/n! = \Sigma(1+\alpha)^n\cdot x^n/n!$ **, ebből láthatjuk az α_n sorozat rekurziós szabályát: $\alpha^{n+1} = (1+\alpha)^n$, azaz** $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = (1+\alpha)^1 = 1 + 1 = 2$,
$\alpha_3 = (1+\alpha)^2 = 1 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = 1 + 2 + 2 = 5$, $\alpha_4 = (1+\alpha)^3 = 1 + 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 =$
$= 1 + 3 + 6 + 5 = 15$ **, és így tovább.**

<u>A Fibonacci sorozat</u>: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, . . .

Itt $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, és $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$.

A Fibonacci sorozat generátorfüggvénye $G(x) = 0 + 1\cdot x + 1\cdot x^2 + 2\cdot x^3 + 3\cdot x^4 + 5\cdot x^5 + \dots$
G(x) –et a következőképpen kapom meg:
Szorozzuk meg $(1 - x - x^2)$ – tel:
$G(x)\cdot(1 - x - x^2) = f_0 + (f_1 - f_0)\cdot x + (f_2 - f_1 - f_0)\cdot x^2 + (f_3 - f_2 - f_1)\cdot x^3 + (f_4 - f_3 - f_2)\cdot x^4 + \dots = x$
mert $f_0 = 0$, $f_1 - f_0 = 1$, és a többi zárójeles kifejezés értéke mind 0.
Tehát $G(x) = x / (1 - x - x^2)$ lesz. Ez formálisan a $G(x) = 1 / (1 - Fx)$ alakban írható.

A Fibonacci – számok a $h = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ és az $1 - h = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ aranymetszési számokkal
a következő módon állíthatók elő: $f_n = \frac{h^n - (1-h)^n}{\sqrt{5}}$.
<u>Bizonyítás</u>: $h^2 = 1 + h$, $h^3 = 1 + 2h$, $h^4 = 2 + 3h$, $h^5 = 3 + 5h$, és $h^n = f_{n-1} + f_n h$.
$h^{-1} = h - 1$, $h^{-2} = 2 - h$, $h^{-3} = 2h - 3$, $h^{-4} = 5 - 3h$, és $h^{-n} = (-1)^n f_{n+1} + (-1)^{n-1} f_n h$.
$(1 - h) = -h^{-1}$. Végül $\sqrt{5} = 2h - 1$, ezekből kell összekombinálni őket.

A fenti előállítás birtokában az exponenciális generátorfüggvény is kiszámolható:

$$E(x) = e^{Fx} = \frac{e^{hx} - e^{(1-h)x}}{\sqrt{5}} .$$

Ennek segítségével igazolható az $F^2 = 1 + F$ összefüggés. Ez azt jelenti, hogy $F^{2n} = (1 + F)^n$,
azaz $f_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_k$. Látjuk, hogy az $F^2 = 1 + F$ összefüggés formailag megegyezik a
$h^2 = 1 + h$ összefüggéssel. Általában is igaz tehát, hogy $F^n = f_{n-1} + f_n F$. És akkor

$$F^{n\cdot m} = (f_{n-1} + f_n F)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f_{n-1}{}^k \cdot f_n{}^{m-k} \cdot F^{m-k} \text{, azaz } f_{n\cdot m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f_{n-1}{}^k \cdot f_n{}^{m-k} \cdot f_{m-k} .$$

Ez egy nagyon szép összefüggés a Fibonacci – számokra.
Be is írom a Sloane – katalógusba, ha még nem szerepel.

Így pl. $F^{12} = 144 = F^{3\cdot4} = (1 + 2F)^4 = 1\cdot1\cdot2^4 f_4 + 4\cdot1\cdot2^3 f_3 + 6\cdot1\cdot2^2 f_2 + 4\cdot1\cdot2^1 f_1 + 1\cdot1\cdot2^0 f_0 =$
$= 1\cdot1\cdot16\cdot3 + 4\cdot1\cdot8\cdot2 + 6\cdot1\cdot4\cdot1 + 4\cdot1\cdot2\cdot1 + 1\cdot1\cdot1\cdot0 = 48 + 64 + 24 + 8 + 0 = 144$.

$F^{15} = 610 = F^{3\cdot5} = (1 + 2F)^5 = 1\cdot1\cdot2^5 f_5 + 5\cdot1\cdot2^4 f_4 + 10\cdot1\cdot2^3 f_3 + 10\cdot1\cdot2^2 f_2 + 5\cdot1\cdot2^1 f_1 + 1\cdot1\cdot2^0 f_0 =$
$= 1\cdot1\cdot32\cdot5 + 5\cdot1\cdot16\cdot3 + 10\cdot1\cdot8\cdot2 + 10\cdot1\cdot4\cdot1 + 5\cdot1\cdot2\cdot1 = 160 + 240 + 160 + 40 + 10 = 610$.

<u>Szimbólikus deriválás</u>: lehet a szimbólum szerint is deriválni a generátorfüggvényt.
Az A^n szimbólikus hatvány szimbólikus deriváltja $n\cdot A^{n-1}$.
Így $d/dA\ 1/(1 - Ax) = x/(1 - Ax)^2$ lesz.

Lehet játszogatni a generátorfüggvény deriválásával is.

Például mi lesz a Fibonacci sorozat generátorfüggvényének a deriváltja?

d/dx $x/(1 - x - x^2) = (1\cdot(1 - x - x^2) - x\cdot(-1 - 2x))/(1 - x - x^2)^2 = (1 + x^2) / (1 - x - x^2)^2$.

d/dx $1 / (1 - Fx) = F / (1 - Fx)^2 = F / (1 + F^2x^2 - 2Fx) = F / (1 + (1 + F)x^2 - 2Fx) =$

$= F / (1 + x^2 - F(2x - x^2)) = \dfrac{F}{(1+x^2)(1-F\frac{2x-x^2}{1+x^2})}$. **Mi $F / (1 - Fx)$?**

Nos, $F\cdot\Sigma F^n x^n = \Sigma F^{n+1}x^n = (\Sigma F^{n+1}x^{n+1})/x = G(x)/x$, ha $G(x) = \Sigma F^n x^n = x/(1 - x - x^2)$.

Akkor $\dfrac{F}{(1+x^2)(1-F\frac{2x-x^2}{1+x^2})} = \dfrac{G(\frac{2x-x^2}{1+x^2})}{(1+x^2)(\frac{2x-x^2}{1+x^2})} = \dfrac{1}{2x-x^2}\dfrac{\frac{2x-x^2}{1+x^2}}{1-\frac{2x-x^2}{1+x^2}-(\frac{2x-x^2}{1+x^2})^2} =$

$= \dfrac{1+x^2}{(1+x^2)^2-(2x-x^2)(1+x^2)-(2x-x^2)^2} = \dfrac{1+x^2}{1+x^4+2x^2-2x+x^2+x^4-2x^3-4x^2-x^4+4x^3} =$

$= \dfrac{1+x^2}{1-2x-x^2+2x^3+x^4}$. **$(1 - x - x^2)^2 = 1 + x^2 + x^4 - 2x - 2x^2 + 2x^3 = 1 - 2x - x^2 + 2x^3 + x^4$.**

Látjuk hogy a nevezők is megegyeznek, tehát a kissé kacifántos úton is megkaptuk a generátorfüggvény deriváltját. Ez is igazolja a szimbólikus számolás helyességét.

Végül nézzük meg, mi $f_{n\cdot k}$ generátorfüggvénye?

G(x) = $\dfrac{1}{1-F^n x} = \dfrac{1}{1-(f_{n-1}+f_n F)x} = \dfrac{1}{(1-f_{n-1}x)(1-F\frac{f_n x}{(1-f_{n-1}x)})} = \dfrac{1}{(1-f_{n-1}x)}G(\dfrac{f_n x}{(1-f_{n-1}x)}) =$

G(x) = $\dfrac{1}{1-f_{n-1}x}\dfrac{\frac{f_n x}{1-f_{n-1}x}}{1-\frac{f_n x}{1-f_{n-1}x}-(\frac{f_n x}{1-f_{n-1}x})^2} = \dfrac{f_n x}{(1-f_{n-1}x)^2-f_n x(1-f_{n-1}x)-(f_n x)^2}$.

Az exponenciális generátorfüggvénnyel is lehet sorozatokat értelmezni.

Ha $E(x) = 1 / (1 - 2sh(x))$ akkor $a_n =$ 1, 2, 8, 50, 416, 4322, 53888, 783890, 13031936, 243733442, . . .
ahol n = 0,1,2, . . .

Ha $E(x) = 1 / (1 - 3sh(x))$ akkor $a_n =$ 1, 3, 18, 165, 2016, 30783, 564048, 12057825, 294587136, . . .

Ha $E(x) = 1 / (1 - sh(x))^2$ akkor $a_n =$ 1, 2, 6, 26, 144, 962, 7536, 67706, 685824, 7730882, 95970816, .

A Maple 7 programmal a következő módon lehet sorozatokat csinálni:

```
> restart:
> E(x):=1/(1-sinh(x))^2:
```
itt adom meg az exp. generátorfüggvényt.
```
> f[0]:=E(x):
> for n from 1 to 30 do f[n]:=diff(f[n-1],x) od:
> x:=0:
> seq(f[n],n=0..30);
```
Ez a program az előre megadott exp. generátorfüggvényből konstruál sorozatot.