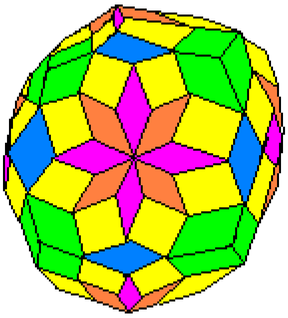
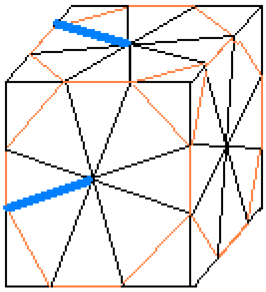
A 132 lapú romboéder (132-es labda)


1. ábra

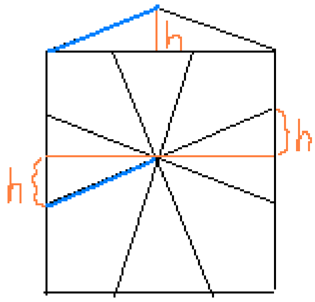
Ez a csinos kis jószág 132 rombusz lapból áll. 3 féle rombusz van: az első típus a rózsaszín-narancssárga, ennek szöge 41.88204094 fok, aminek a cosinusa $\frac{7+4\sqrt{2}}{17}$. Ebből a rombuszból 48 van. A sárga rombusz szöge 82.66100921 fok, aminek a cosinusa $\frac{5-2\sqrt{2}}{17}$. Ebből is 48 van. A harmadik rombusz a zöld és kék, ennek szöge 119.2776132 fok, aminek a cosinusa $\frac{3-8\sqrt{2}}{17}$. Ebből 36 van, 12 kék és 24 zöld. A rózsaszín és narancs rombuszok hat darab nyolcas rozettát képeznek, amelyek egy kocka lapjai szerint helyezkednek el. A zöld rombuszok a kocka csúcsainak, a kék rombuszok a kocka éleinek felelnek meg. A poliédernek 2·132 = 264 éle van, amelyek egyforma hosszúak, és 134 csúcsa, így az Euler összefüggés szerint lap + csúcs = él + 2, azaz 132 + 134 = 264 + 2. A csúcsok kiosztása: 6 darab 8-as csúcs, 6·8 + 8 = 56 darab 3-as csúcs, 6·8 = 48 darab 4-es csúcs, és 12·2 = 24 darab 5-ös csúcs , azaz 6 + 56 + 48 + 24 = 134 csúcs összesen.
A rombusz oldalai párhuzamosak, ez azt jelenti hogy a párhuzamos élek egy-egy családot alkotnak. Egy családban 22 él van, amelyek mentén a rombuszok egy-egy, a poliédert megkerülő övekbe rendeződnek. 12 család van, ami azt jelenti hogy a poliéder élei 12 különböző irányt jelölnek ki. Minden rombusz pontosan két öv metszéspontjában van. Bármely két övnek két metszéspontja van, két polárisan ellentétes helyzetű rombusz, azaz rombuszpár. A 132 lap 66 rombuszpárt alkot. $\binom{12}{2}=\frac{12\cdot 11}{2}=\frac{132}{2}=66$ éppen, ami azt jelenti hogy bármely két övnek pontosan egy rombuszpár felel meg és viszont, azaz a rombuszpárok és az övpárok kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást.

Hogyan kell ezt a poliédert megszerkeszteni?

Induljunk ki egy kockából, aminek a lapjaira felrajzoljuk a 8-as rozettát:

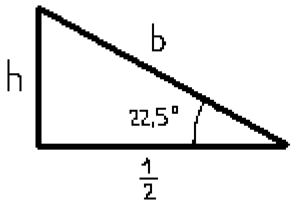


2. ábra.

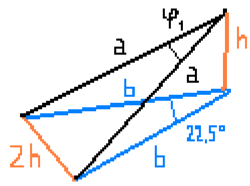


3. ábra

A 2. ábrán láthatjuk a rozettákat. A piros nyolcszögek szabályosak. Ha a kocka éle 1, akkor a nyolcszög oldala 2h = $\sqrt{2}-1=0.414213562$. A vastag kékkel kihúzott sugár hossza b, ez egy olyan derékszögű háromszög átlója, amelynek a befogói $\frac{1}{2}$ és h. A 8 sugár 45 fokonként követi egymást, ezért a derékszögű háromszög szöge 22,5 fok.



4. ábra

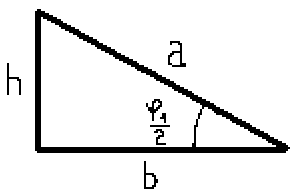


5. ábra

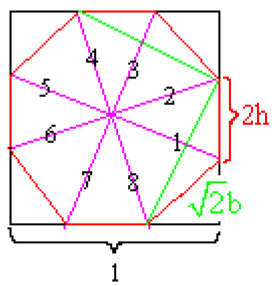
A 4. ábra szerint tg 22,5 fok = 2h, ezért h = $\frac{1}{2}\mathrm{tg}22,5°=\frac{\sqrt{2}-1}{2}=0.207106781$.

$\cos 22.5°=\frac{1}{2b}$ miatt b = $\frac{1}{2\cos 22.5°}$ = 0.5411961.

Mit kell tenni ahhoz hogy a két kék vonal éppen párhuzamos legyen? Meg kell emelni a rozetták csúcsát! A 3. vetületi ábrából pedig kiderül, hogy a csúcsot éppen h-val kell megemelni! Ezzel már meg tudjuk határozni a rombuszunk szögét. Az 5. ábrán láthatjuk a megemelt csúcsnál levő φ_1 szöget. Látunk egy olyan derékszögű háromszöget is, amelynek befogói h és b, átfogója a. Ugyanezt a háromszöget kapom, ha a 2h , a , a háromszöget megfelezem, ennek csúcsában van a φ_1 szög. Így nyerem a 6. ábrát:



6. ábra



7. ábra

A 6. ábra tanúsága szerint $\mathrm{tg}\frac{\varphi_1}{2}=\frac{h}{b}$, nade a 4. ábra szerint $\frac{h}{b}=\sin 22.5°$!

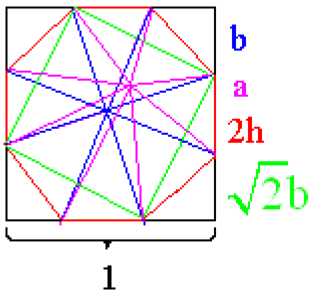
Ezek szerint $\varphi_1 = 2\mathrm{arctg}(\sin 22.5°) = 41.88204094°$. Ez tehát a rózsaszín-narancs rombuszok szöge. A szög cosinusát is ki lehet számolni:

$$\cos\varphi_1=\cos^2\frac{\varphi_1}{2}-\sin^2\frac{\varphi_1}{2}=\frac{b^2}{a^2}-\frac{h^2}{a^2}=\frac{h^2+0.25}{a^2}-\frac{h^2}{a^2}=\frac{0.25}{a^2}$$

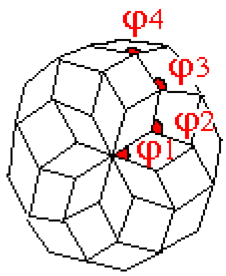
$$a^2=h^2+b^2=h^2+h^2+0.25=2(\frac{\sqrt{2}-1}{2})^2+0.25=\frac{6-4\sqrt{2}+1}{4}=\frac{7-4\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\varphi_1=\frac{0.25}{a^2}=\frac{4\cdot 0.25}{7-4\sqrt{2}}=\frac{1\cdot(7+4\sqrt{2})}{49-16\cdot 2}=\frac{7+4\sqrt{2}}{17}.$$

Most kíváncsiak vagyunk a többi rombusz szögére is.



8. ábra



9. ábra

A 7. ábrán az 1 2 3 4 5 6 7 8 rózsaszín él hossza a, de a vetület hossza b, (ezt mutatja a 8. ábra), így a zöld vonal hossza $\sqrt{2}b$, hiszen egy b oldalú négyzet átlója. A 9. ábra mutatja, hogy a φ_1 szög az 1 és 2 él közt van, a φ_2 szög az 1 és 3 él közt van, a φ_3 szög az 1 és 4 él közt van, és a φ_4 szög az 1 és 5 él közt van, ennek megfelelően a φ_1 szöghöz olyan háromszög tartozik, amelynek oldalai a,a és 2h, a φ_2 szöghöz olyan háromszög tartozik, amelynek oldalai a, a és $\sqrt{2}b$, a φ_3 szöghöz olyan háromszög tartozik, amelynek oldalai a, a és 1 , végül a φ_4 szöghöz olyan háromszög tartozik, amelynek oldalai a, a és 2b. Ebből már meg tudjuk adni a szögek felének színuszát:

$\sin\frac{\varphi_1}{2}=\frac{h}{a}$, $\sin\frac{\varphi_2}{2}=\frac{b}{\sqrt{2}a}$, $\sin\frac{\varphi_3}{2}=\frac{1}{2a}$, és $\sin\frac{\varphi_4}{2}=\frac{b}{a}=\cos\frac{\varphi_1}{2}$. Tehát $\varphi_4 = 180 - \varphi_1$!

A félszögek színuszából a szögek koszínusza a $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ alapján

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ módon számolható. Ennek megfelelően

$$a^2 = h^2 + b^2 = h^2 + h^2 + \frac{1}{4} = \frac{2(\sqrt{2}-1)^2+1}{4} = \frac{2(3-2\sqrt{2})+1}{4} = \frac{7-4\sqrt{2}}{4}$$

$$c_1 = \cos\varphi_1 = 1 - 2\frac{h^2}{a^2} = \frac{a^2-2h^2}{a^2} = \frac{1}{4a^2} = \frac{1}{7-4\sqrt{2}} = \frac{7+4\sqrt{2}}{49-16\cdot 2} = \frac{7+4\sqrt{2}}{17}$$

$$c_2 = \cos\varphi_2 = 1 - 2\frac{b^2}{2a^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{h^2}{a^2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{7-4\sqrt{2}} = \frac{(3-2\sqrt{2})(7+4\sqrt{2})}{17} = \frac{5-2\sqrt{2}}{17}$$

$$c_3 = \cos\varphi_3 = 1 - 2\frac{1}{4a^2} = 1 - \frac{2}{7-4\sqrt{2}} = \frac{5-4\sqrt{2}}{7-4\sqrt{2}} = \frac{(5-4\sqrt{2})(7+4\sqrt{2})}{17} = \frac{3-8\sqrt{2}}{17}$$

Megvannak a koszínuszok. Most néhány érdekes összefüggés következik:

$$2c_1 + c_3 = 1$$
$$c_1 + 2c_2 = 1$$
$$c_2 + s_3 = 1 \qquad (s_3 = \sin\varphi_3 = \sqrt{1-c_3^2} = \frac{12+2\sqrt{2}}{17})$$
$$c_1 + c_2 = s_3$$
$$c_3 + 4s_3 = 3$$
$$s_3 - 4c_3 = 2\sqrt{2}$$
$$c_2 + 4c_3 = 1 - 2\sqrt{2}$$

Ezekből ki tudunk választani 3 egyenletet, amelyek egy elsőfokú egyenletrendszert alkotnak, és amit könnyedén meg tudunk oldani:

$$2c_1 + c_3 = 1$$
$$c_1 + 2c_2 = 1$$
$$c_2 + 4c_3 = 1 - 2\sqrt{2}$$

Az egyenletrendszer mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$, ennek determinánsa 2·2·4 +1·1·1 = 17.

A mátrix inverze $\frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix} 8 & 1 & -2 \\ -4 & 8 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, a jobboldali vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1-2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Így az eredmény: $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix} 8 & 1 & -2 \\ -4 & 8 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1-2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix} 7+4\sqrt{2} \\ 5-2\sqrt{2} \\ 3-8\sqrt{2} \end{pmatrix}$