A FÍ – ALGEBRA

Először is: mit nevezünk algebrának? Valami olyan matematikai struktúrát, amelyben számolni lehet. Van két művelet, az összeadás és a szorzás. Az összeadás kommutatív csoportot alkot, a szorzás viszont tetszőleges lehet.

Az összeadás tulajdonságai:

1. **$a + b = b + a$ (kommutativitás)**
2. **$(a + b) + c = a + (b + c)$ (asszociativitás)**
3. **$a + 0 = a$ (nullelem létezése)**
4. **$a + (-a) = a - a = 0$ (inverz, ellentett, kivonás)**

A szorzás tulajdonságai:

1. **$a \cdot 0 = 0$ (nullával szorzás nullát ad)**
2. **$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (szorzás és összeadás disztributivitása)**

Bár nyilvánvaló, de azért megemlítendő, hogy a, b és a + b, valamint a · b ugyanannak a halmaznak az eleme, azaz egyik művelet se vezet ki a halmazból.

Egy egyműveletes struktúrából könnyen képezhetünk algebrát a következőképpen:

Legyen a struktúra művelete a szorzás. Legyenek a struktúra elemei az A, B, C, … szimbólummal jelölt elemek. Ekkor bevezethetjük a $\lambda\cdot A$, $\mu\cdot B$, $\nu\cdot C$ … elemeket, ahol a görög betűk valós vagy komplex számokat jelölnek. Ezekre az új elemekre kiterjeszthetjük a struktúra szorzási szabályát:

$(\lambda\cdot A)\cdot(\mu\cdot B) = (\lambda\cdot\mu)\cdot(A\cdot B)$, ahol a $(\lambda\cdot\mu)$ a valós (vagy komplex) számok szokásos szorzata,

és értelmezhetjük most már az összeadást is:

$(\lambda\cdot A) + (\mu\cdot A) = (\lambda + \mu) \cdot A$.

Ha A és B az eredeti struktúra elemei, akkor A + B értelmezve van, de általában nem hozható egyszerűbb alakra (kivételek persze lehetnek).

Ennek megfelelően a kibővített struktúra új elemei általában így írhatók:

$\lambda\cdot A + \mu\cdot B + \nu\cdot C$ … vagy rövidítve $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cdot A_í$, ahol λ_i az együtthatók (valós vagy komplex) és A_i pedig az eredeti struktúra elemei. Két ilyen elem szorzata így kapható:

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cdot A_í \text{ , } B = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \cdot A_j \text{ és } A\cdot B = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cdot A_í\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \cdot A_j\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_i \cdot \mu_j \cdot \left(A_i \cdot A_j\right)$$

Ezek után már csak azt kell tudni hogy mi $A_i \cdot A_j$. Ez az eredeti struktúra valamely A_k eleme. Ezzel a módszerrel az eredeti egyműveletes struktúrából egy kétműveletes algebrát csináltunk. De ez csak a kezdete a lehetőségeknek!

Kiindulhatunk eleve egy { A_i } szimbólumhalmazból, és képezhetjük belőle a $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cdot A_í$ **elemeket. Ezeket a fent definiált módon szorozhatjuk össze. Ehhez csak az $A_i \cdot A_j$ szorzatok értékét kell lerögzíteni, amit a C_{ijk} strukturális állandókkal adunk meg:**

Ekkor $A_i \cdot A_j = \sum_{k=1}^{\infty} C_{ijk} \cdot A_k$ **lesz. Ez természetesen megint az algebra egy eleme lesz.**

Így $\mathbf{A \cdot B} = (\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cdot A_í) \cdot (\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \cdot A_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_i \cdot \mu_j \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_{ijk} \cdot A_k \right)$ **lesz.**

Szokás ebben a műfajban az Einsteini konvenciót használni, ahol a szumma jeleket elhagyjuk, és a kétszer szereplő indexekre összegezni kell, ekkor

$\mathbf{A \cdot B} = (\lambda_i \cdot A_í) \cdot (\mu_j \cdot A_j) = \lambda_i \cdot \mu_j \cdot C_{ijk} \cdot A_k$ **lesz.**

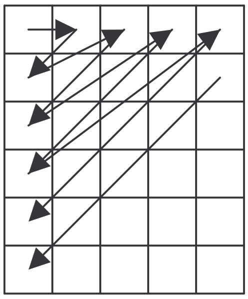
Még egy dolog szokás, az A_k argumentumokat egyszerűen elbliccelik, és így az algebra elemeit egyszerűen a λ_i együtthatókkal reprezentálják, így az algebra eleme egy vektor lesz, azaz egy szám-végtelenes. Én nem tartom ezt igazán jó szokásnak, bár a csoportelmélet számára sok hasznos felismerés így született. Például a síkidomok forgatásai csoportot alkotnak, és a forgatások önálló entitásokként kezelhetők úgy is, hogy megfeledkezünk arról, mit is forgatunk tulajdonképpen.

**Az általános algebra megadása a C_{ijk} strukturális állandók lefixálásával történik.
Az általános algebra se nem kommutatív, se nem asszociatív. Általában minden algebra egyedi tulajdonságokkal rendelkezik, a valós számok mások mint a komplex számok, és azok is különböznek a kvaterniióktól. Ugyanakkor az algebrák egymást tartalmazhatják, így az októniók tartalmazzák a kvaternióalgebrát, a kvaternióalgebra a komplex számokat és a komplex számok a valós számokat. Valódi matrjoskavilág.**

Én azonban szeretnék egy olyan algebrát konstruálni, amelyben az összes többi algebra benne van! Lehetséges ez? Illetve legyünk szerényebbek egy picit: legyen benne minden véges algebra, és minden olyan végtelen algebra, amely a megszámlálhatóan végtelen darab { A_i } szimbólumhalmazból képezhető a $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cdot A_í$ **szabállyal, és a C_{ijk} strukturális állandók tetszőlegesek lehetnek. Magyarán szólva azt várjuk, hogy ha van egy adott algebránk az { A_i } szimbólumhalmaz felett, akkor az univerzális algebrában ki tudok választani bizonyos { A^*_i } elemeket, amelyek pontosan úgy szorzódnak, mint az { A_i } elemek. Tehát ha** $A_i \cdot A_j = \sum_{k=1}^{\infty} C_{ijk} \cdot A_k$ **, akkor** $A_i^* \cdot A_j^* = \sum_{k=1}^{\infty} C_{ijk} \cdot A_k^*$ **, ugyanazzal a C_{ijk}-val.**

Ezt az univerzális algebrát nevezem Fí-algebrának, mert alapelemeit φ–vel jelölöm.
A Fí – algebrához tehát a C_{ijk} strukturális állandókat kell megadni, és ezt elég sajátos módon tesszük. A Fí – algebra elemei a φ_0 , φ_1, φ_2 , φ_3 . . . szimbólumok, és ezek lineáris kombinációi, azaz a $\sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot \varphi_i$ összegek. Itt most az együtthatókat jelölöm latin betűkkel.
A szorzási szabályhoz egy táblázatot használunk fel:

A Fí-algebra lelke egy egyszerű végtelen táblázat, amit már 75-ben felírtam, pl. a racionális számok sorbarendezésénél előjött. Írjuk fel a pozitív racionális számokat egy táblázatban, nem törődve azzal hogy az egyszerűsítés miatt ugyanaz a szám többször is szerepel! A számokat a/b alakban írjuk fel, ahol a és b megy 1-től végtelenig. Ezt kapjuk:



1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6 . . .
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6 . . .
3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6 . . .
4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6 . . .
5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6 . . .
6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6 . . .

1	2	4	7	11	16
3	5	8	12	17	23
6	9	13	18	24	31
10	14	19	25	32	40
15	20	26	33	41	50
21	27	34	42	51	61

a jobboldali táblázat azt mutatja meg, hogy az egyes rac számokat hogyan sorolom fel egyetlen végtelen sorozatban! És ez a Fí algebra kulcstáblázata!

A felsorolás tehát így menne: 1/1, 1/2, 2/1, 1/3, 2/2, 3/1, 1/4, 2/3, 3/2, 4/1, 1/5, 2/4, 3/3, …

	0	1	2	3	4	5
0	1	2	4	7	11	16
1	3	5	8	12	17	23
2	6	9	13	18	24	31
3	10	14	19	25	32	40

Ez az A_{ij} táblázat, a piros számok a sorok, első index, a zöld számok az oszlopok, második index. Kódolja a táblázat a φ_0 , φ_1, φ_2 , φ_3 . . . sajátvektorok szorzási szabályát! Eddig a linalgebrában nem volt szó arról hogy a vektorok szorozhatók is egymással! Valójában ettől lesz a vektorokból algebra!

$A_{12} = 8$. Jelentse ez azt, hogy $\varphi_8 \cdot \varphi_1 = \varphi_2$! Tehát $\varphi_{A_{ij}} \cdot \varphi_i = \varphi_j$!

És minden más $k \neq i$ esetén $\varphi_{A_{ij}} \cdot \varphi_k = 0$!

Most már meg tudjuk mondani a C_{ijk} strukturális állandókat is:

$C_{A_{ij},i,j} = 1$, ha i , j = 0, 1, 2, 3, . . . és minden egyéb C_{ijk} = 0.

Kérdés: Mit tud az így definiált algebra? Nagyon sokat játszadoztam vele míg rájöttem!

Pl. annak is jelentősége van hogy a számozás nem 1-től hanem 0-tól indul: ekkor a nulladik sorból választjuk az ún. gyökérelemeket, erre majd ott rátérünk.

Most beszéljünk arról, hogy mit nevezünk a klasszikus matekban operátornak!

Színjelölés: az operátorokat piros, a függvényeket (vektorokat) fekete szín jelöli.

Az operátor nem más mint egy leképezés egy vektorról egy másik vektorra. A leképezés lehet lineáris vagy nemlineáris. Mi most csak a homogén lineáris esettel foglalkozunk. Ha a vektort egy számoszlop adja meg, akkor a homogén lineáris operátort egy mátrix reprezentálja.

A homogén lineáris operátorok alapvető tulajdonságai:

$$O(\varphi_1 + \varphi_2) = O\varphi_1 + O\varphi_2 , \qquad O(k\cdot\varphi) = k\cdot O\varphi .$$

$$(O_1 + O_2)\varphi = O_1\varphi + O_2\varphi , \qquad (O_1 O_2)\varphi = O_1(O_2\varphi)$$

Sajátértékfeladat: $O\varphi = \lambda\cdot\varphi$.

A hermitikus operátornak $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \ldots$ **sajátvektorai vannak, melyek**

ortogonálisak, és ezekhez a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \ldots$ **valós sajátértékek tartoznak.**

Legyen most $\psi = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 + \ldots$ **egy általános vektor! Ekkor**

$$O\psi = O(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 + \ldots) = a_1 O\varphi_1 + a_2 O\varphi_2 + a_3 O\varphi_3 + \ldots =$$

$= a_1\lambda_1\varphi_1 + a_2\lambda_2\varphi_2 + a_3\lambda_3\varphi_3 + \ldots$ **Hogy lehet ezt szemléltetni?**

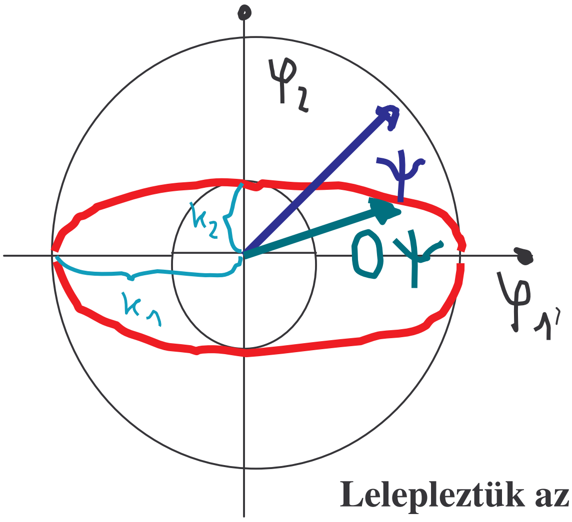
Legyen most $\psi = \cos\alpha\cdot\varphi_1 + \sin\alpha\cdot\varphi_2$! **Ekkor** $O\psi = O(\cos\alpha\cdot\varphi_1 + \sin\alpha\cdot\varphi_2) =$

$= \cos\alpha\cdot O\varphi_1 + \sin\alpha\cdot O\varphi_2 = \cos\alpha\cdot\lambda_1\varphi_1 + \sin\alpha\cdot\lambda_2\varphi_2$.

Mit jelent ez? Azt hogy ψ **az** α **függvényében egy körön fut végig,** $O\psi$ **pedig egy ellipszisen! Tehát az operátor nem csinál mást, minthogy a kört ellipszissé transzformálja!**

A klasszikus fizika diffegyenletekkel dolgozott, és a hely, sebesség, gyorsulás az idő folytonos függvényei voltak. A kvantumfizika esetén a fizikai mennyiségek operátorok lettek, a fizikai mennyiség lehetséges értékei az operátor sajátértékei, a rendszer fizikai állapotát a $\psi(x,y,z,t)$ **állapotfüggvény adja meg, és ha** ψ**-t kifejtjük az operátor sajátfüggvényei szerint, azaz** $\psi = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 + \ldots$ **, akkor a rendszer** $|a_i|^2$ **valószínűséggel a** φ_i **állapotban van, és ha mérést hajtunk végre, akkor a mérés eredménye** $|a_i|^2$ **valószínűséggel a** λ_i **sajátérték lesz. Ebben egyrészt benne van a kvantumbizonytalanság, másrészt az a faramuci dolog, hogy a rendszer állapota a mérés után a** φ_i **állapot lesz, tehát az állapotot mintegy a mérés teremti! Ezt úgy nevezték, hogy a hullámcsomag redukciója.**

Az operátor (mint fizikai mennyiség) a φ állapotban van. A sajátfüggvények ortonormáltak, a lehetséges ψ függvények szintén, vagyis egy operátor összes lehetséges állapota egy egységsugarú gömbön van, az O ψ-k meg egy ellipszoidán. No persze mindez a végtelen dimenziós állapottérben, de ez csak formai különbség.



$$\psi = \cos\alpha\, \varphi_1 + \sin\alpha\, \varphi_2$$

$$O\, \psi = \kappa_1 \cos\alpha\, \varphi_1 + \kappa_2 \sin\alpha\, \varphi_2$$

Nem esett szó még a skaláris szorzatról.

Ezzel lehet az együtthatókat meghatározni.

$$(\psi , \varphi_1) = \cos\alpha\, , \; (\psi , \varphi_2) = \sin\alpha\, .$$

Leleplеztük az operátor turpisságát! Mindössze annyit tesz hogy a

$\psi = \Sigma\, c_i\, \varphi_i$ állapotfüggvényhez az O $\psi = \Sigma\, c_i\, \lambda_i\, \varphi_i$ új állapotfüggvényt rendeli.

A ψ állapotvektor minden koordinátáját λ_i – szeresre nyújtja. Így csinál a gömbből

ellipszoidát. (Mit is tudna tenni szegény?!) Tehát az operátor úgy transzformálja az

állapotvektort, hogy a koordinátáit külön-külön megnyújtja.

Legyen a ψ vektor ilyen: $\psi = b_0\, \varphi_0 + b_1\, \varphi_1 + b_2\, \varphi_2 + \ldots$, ahol a φ_k bázisvektorok egy hermitikus operátor sajátvektorai (sajátfüggvényei)! Az O operátor a sajátvektorokat lineárisan transzformálja, amit egy O_{ij} mátrixszal lehet megadni:

$$O\, \varphi_0 = O_{00}\, \varphi_0 + O_{10}\, \varphi_1 + O_{20}\, \varphi_2 + O_{30}\, \varphi_3 + \ldots$$
$$O\, \varphi_1 = O_{01}\, \varphi_0 + O_{11}\, \varphi_1 + O_{21}\, \varphi_2 + O_{31}\, \varphi_3 + \ldots$$
$$O\, \varphi_2 = O_{02}\, \varphi_0 + O_{12}\, \varphi_1 + O_{22}\, \varphi_2 + O_{32}\, \varphi_3 + \ldots$$
$$O\, \varphi_3 = O_{03}\, \varphi_0 + O_{13}\, \varphi_1 + O_{23}\, \varphi_2 + O_{33}\, \varphi_3 + \ldots \quad \text{stb.}$$

hogyan hat az O operátor a ψ vektorra?

$$O\, \psi = O\, (b_0\, \varphi_0 + b_1\, \varphi_1 + b_2\, \varphi_2 + \ldots) = b_0\, O\, \varphi_0 + b_1\, O\, \varphi_1 + b_2\, O\, \varphi_2 + \ldots =$$

$$= b_0 (O_{00}\, \varphi_0 + O_{10}\, \varphi_1 + O_{20}\, \varphi_2 + O_{30}\, \varphi_3 + \ldots) +$$
$$+ b_1 (O_{01}\, \varphi_0 + O_{11}\, \varphi_1 + O_{21}\, \varphi_2 + O_{31}\, \varphi_3 + \ldots) +$$
$$+ b_2 (O_{02}\, \varphi_0 + O_{12}\, \varphi_1 + O_{22}\, \varphi_2 + O_{32}\, \varphi_3 + \ldots) +$$
$$+ b_3 (O_{00}\, \varphi_0 + O_{13}\, \varphi_1 + O_{23}\, \varphi_2 + O_{33}\, \varphi_3 + \ldots) + \ldots =$$

$= (O_{00}\, b_0 + O_{01}\, b_1 + O_{02}\, b_2 \ldots)\, \varphi_0 +$
$+ \; (O_{10}\, b_0 + O_{11}\, b_1 + O_{12}\, b_2 \ldots)\, \varphi_1 +$
$+ \; (O_{20}\, b_0 + O_{21}\, b_1 + O_{22}\, b_2 \ldots)\, \varphi_2 +$
$+ \; (O_{30}\, b_0 + O_{31}\, b_1 + O_{32}\, b_2 \ldots)\, \varphi_3 + \ldots\ldots$

Látjuk tehát, hogy a vektorok egyindexes sokaságot alkotnak, az operátorok (mátrixok) pedig egy kétindexes sokaságot. A két világ élesen elkülönjül, úgy tűnik, egy dolog nem lehet egyszerre vektor és operátor. A kvantummechanikában aztán látunk ellenpéldát is: ott a vektoroknak az állapotfüggvények felelnek meg, és egy függvényhez hozzárendelhetünk egy operátort úgy, hogy az operátor legyen e függvénnyel való szorzás! Ám ez a hozzárendelt operátor mégsem azonos magával a függvénnyel.

A Fí-algebrában azonban lehet az elemeket egymással szorozni is, amit akár úgy is tekinthetek, mint egy operátorral való leképezést! Ha A·B = C, akkor az A-t olyan operátorral azonosíthatom, amely a B vektort a C vektorba viszi át. Ha most feltérképezem hogy az A a φ_k bázisvektorokat hova képezi le, akkor már meg is kaptam azt az operátort, amely az A-val való szorzásnak megfelel! Tehát az A nemcsak vektor, de egyúttal operátor is! Operátorként akkor működik, ha balról szorzok vele, vektorként pedig akkor, amikor a jobboldalon áll! Ugyanaz a mennyiség, két különböző szerepben!

Ebben az algebrában ugyanazok a mennyiségek kódolják az operátorokat, mint a vektorokat! Tehát igaz lett Mota 80-ban kimondott tétele: Azonossá válik a függvények halmaza azon halmazzal, amin a függvény értelmezve van! Ezt neveztem én SUÓ-nak, azaz Self Using Operationnak. Ha pl. az O operátor olyan, hogy $O\, \varphi_1 = \varphi_2$, akkor az O operátor azonosítható a φ_8 vektorral, hiszen láttuk, hogy $\varphi_8 \cdot \varphi_1 = \varphi_2$! Ha pedig $O\, \varphi_1 = \lambda \cdot \varphi_2$, akkor $O = \lambda \cdot \varphi_8$-cal azonosítható. Ám ennél sokkal több is igaz! Nem kevesebbről van szó, minthogy a Fí-algebrában minden linopcsi egyértelműen kódolható! $O = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots$, és $\psi = b_0\varphi_0 + b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + \ldots$, a kettejük szorzata: $O\,\psi = (a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots)\cdot(b_0\varphi_0 + b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + \ldots)$, és most vegyük figyelembe a szorzásszabályt: $a_1 b_0\varphi_0 + a_2 b_0\varphi_1 + a_3 b_1\varphi_0 + a_4 b_0\varphi_2 + a_5 b_1\varphi_1 + a_6 b_2\varphi_0 + a_7 b_0\varphi_3 + a_8 b_1\varphi_2 + a_9 b_2\varphi_1 + a_{10} b_3\varphi_0 + a_{11} b_0\varphi_4 + \ldots\ldots$ láthatjuk a szabályt: a_i indexe folyamatosan nő: 1,2,3,4,5… , b_j indexe így változik: 0, 0 1, 0 1 2, 0 1 2 3, 0 1 2 3 4 … és φ_k indexe pedig így: 0, 1 0, 2 1 0, 3 2 1 0, 4 3 2 1 0…. Ez pontosan megfelel az Aij táblázat szabályának. Ha a φ_k együtthatóit összevonom, kapom azt hogy $(a_1 b_0 + a_3 b_1 + a_6 b_2 + a_{10} b_3 \ldots)\,\varphi_0 + (a_2 b_0 + a_5 b_1 + a_9 b_2 + a_{14} b_3 \ldots)\,\varphi_1 + (a_4 b_0 + a_8 b_1 + a_{13} b_2 + a_{19} b_3 \ldots)\,\varphi_2 + (a_7 b_0 + a_{12} b_1 + a_{18} b_2 + a_{25} b_3 \ldots)\,\varphi_3 +$ stb. És hogyan hat egy O operátor a ψ vektorra? Nos, ezt egy O_{ij} mátrixszal lehet megadni. $O\,\psi = (O_{00}\, b_0 + O_{01}\, b_1 + O_{02}\, b_2 \ldots)\,\varphi_0 + (O_{10}\, b_0 + O_{11}\, b_1 + O_{12}\, b_2 \ldots)\,\varphi_1 + (O_{20}\, b_0 + O_{21}\, b_1 + O_{22}\, b_2 \ldots)\,\varphi_2 + (O_{30}\, b_0 + O_{31}\, b_1 + O_{32}\, b_2 \ldots)\,\varphi_3 + \ldots\ldots$
Ha összevetjük ezt az előbbi képletünkkel, azt látjuk, hogy $O_{00} = a_1$, $O_{01} = a_3$, $O_{02} = a_6$, $O_{03} = a_{10}$, ... , $O_{10} = a_2$, $O_{11} = a_5$, $O_{12} = a_9$, $O_{13} = a_{14}$, ... , $O_{20} = a_4$, $O_{21} = a_8$, $O_{22} = a_{13}$, $O_{23} = a_{19}$, ... , $O_{30} = a_7$, $O_{31} = a_{12}$, $O_{32} = a_{18}$, ... stb. Ha kicsit odafigyelünk, láthatjuk, hogy az O_{ij} táblázat éppen az A_{ij} táblázat transzponáltja, tükörképe, azaz $O_{ij} = a_{A_{ji}}$. Itt az a_i szám indexe az A_{ji} táblázatelem. Ne keverjük össze:

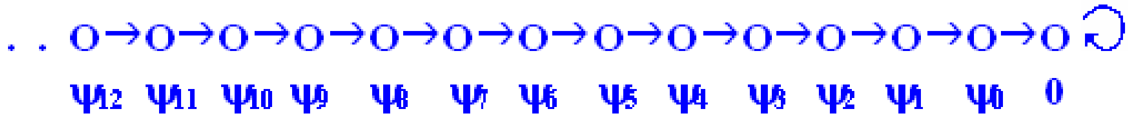
az O_{ij} az kétindexes, az a_i pedig egyindexes, így pl. Óháromegy = átizenkettő, nem pedig áegykettő! Látjuk tehát, hogy a végtelenszer végtelen darab O_{ij} –t bele tudtuk zsúfolni az egyszer végtelen darab a_i –k közé! Ez a trükk szintén 75 óta kísért engem, hiszen eredetileg ezt neveztem Naishi-transzformációnak! No és ez még csak a kezdete a Fí-algebra csodáinak! Most megmutatom, hogy a Fí-algebrába belevihető pl. a Taylor-sor is!

Azonosítsuk a φ_i szimbólumot az x^i hatványfüggvénnyel! Egy Taylor-sor így néz ki: $f(x) = \Sigma\, a_i\, x^i$, az index fut 0-tól ∞ -ig. Az x^0 az természetesen 1. Ekkor az f(x) függvénynek megfeleltetjük a $\psi = \Sigma\, a_i\, \varphi^i$ vektort. Gond van azonban a szorzással: $x^i \cdot x^j = x^{i+j}$, azonban $\varphi^i \cdot \varphi^j \neq \varphi^{i+j}$! Ezen úgy segítünk, hogy különválasztjuk az x^i –t mint függvényt, és mint szorzó operátort! $x \cdot x^i = x^{i+1}$, ezért az $x \cdot$ operátornak feleltessük meg a következő vektort: $X = \varphi_2 + \varphi_8 + \varphi_{18} + \varphi_{32} + \varphi_{50} + \varphi_{72} + \ldots$ Ez teljesíti a következő szabályt: $X \cdot \varphi_i = \varphi_{i+1}$, ami megfelel az elvárt $x \cdot x^i = x^{i+1}$ szabálynak. A 2,8,18,32,50… számok az Aij táblázatban átlósan helyezkednek el. Ha eggyel odébb megyünk, kapjuk a 4,12,24,40… számokat, amelyek az $X^2\,\psi = X \cdot (X \cdot \psi)$ operátornak felelnek meg.
Így tehát $X^2 = \varphi_4 + \varphi_{12} + \varphi_{24} + \varphi_{40} + \varphi_{60} + \varphi_{84} + \ldots$, $X^3 = \varphi_7 + \varphi_{17} + \varphi_{31} + \varphi_{49} + \varphi_{71} + \ldots$
És így tovább. Ezzel képezhető az f(x) függvénynek megfelelő operátorfüggvény, $F(X) = \Sigma\, a_i\, X^i$, ahol a_i ugyanaz, mint f(x)-nél. Ezzel az $f(x) \cdot g(x)$ függvényszorzatnak az $F(X) \cdot g(x)$ operátor-függvény-szorzat felel meg. Láttuk tehát, hogy f(x)-nek két vektort is megfeleltetünk, egyiket vektor szerepben, a másikat operátor szerepben. Erre a skizofrén hasadásra azért van szükség, mert a Fí-algebra nem asszociatív és nem is kommutatív! Viszont ebben rejlik az univerzalitása és az ereje! A deriválásnak megfelelő differenciál-operátort is könnyen tudjuk képezni. Ha $f(x) = \Sigma\, a_n\, x^n$, akkor $f'(x) = \Sigma\, a_n\, n\, x^{n-1}$, ehhez az alábbi opcsi kell: $D\,\varphi_n = n \cdot \varphi_{n-1}$. Erre az alábbi vektor alkalmas:
$D = \varphi_3 + 2\,\varphi_9 + 3\,\varphi_{19} + 4\,\varphi_{33} + 5\,\varphi_{51} + 6\,\varphi_{73} + \ldots$ Közben ugye figyeltünk, nagyon egyszerű szabályok adják meg e számokat: $2,8,18,32,50,72\ldots = 2\,n^2$, ha n=1,2,3, … a D szabálya: $2\,n^2 + 1$, ha n=1,2,3, … A most megismert X és D operátorokkal könnyedén igazolni tudjuk a Heisenberg-féle felcserélési törvényt: $DX - XD = 1$! Ennek kvantummechanikai megfelelője $PX - XP = -\,i\,\hbar\, I$, ahol I az identitásopcsi. P viszont $-\,i\,\hbar\,\partial/\partial x$.
Szóval ezt kell igazolni: $D\,(X\,\psi) - X\,(D\,\psi) = 1 \cdot \psi = \psi$. Elegendő a dolgot belátni $\psi = \varphi_n$ –re. $D\,(X\,\varphi_n) - X\,(D\,\varphi_n) = D\,(\varphi_{n+1}) - X\,(n \cdot \varphi_{n-1}) = (n+1)\,\varphi_n - n\,\varphi_n = \varphi_n$.

Látjuk, hogy az összefüggés fennáll. Most lehetőség van arra is, hogy φ_n –nek pl. a harmónikus oszcillátor sajátfüggvényeit feleltessük meg. Itt is két szerep kell, egy függvényszerep és egy operátorszerep. De a Fí-algebra még ennél is többre képes, mégpedig arra, hogy bármely véges szorzótáblával megadott algebra modelljét meg lehet benne konstruálni! Ezt egy olyan mechanizmussal tesszük, amit éppen 75-ben fedeztem fel, ez egyfajta önbővítő eljárás, amely határesetben épp a kívánt megoldást adja. Olyan mint a Self-Konzisztens Field módszer. De annál egyszerűbb módszer, elemi számolást igényel csak. Később pedig azt is látni fogjuk, hogy a végtelen szorzótábla is belevihető a Fí – algebrába! Sőt még oly módon is belevihető, hogy mindvégig véges normájú vektorokkal dolgozunk! Ez megnyitja a kaput egy olyan algebrai világ felé, ahol az elemek egymást tükrözik, és létezik egy végtelen téróceán, amely a világot magában foglalja (ez az éter megfelelője). A függvények a normált vektorok, az operátorok pedig a végtelen normájú vektorok. A két világ bár élesen elkülönül, mégis van átjárás köztük, azaz egy függvény válhat operátorrá és viszont. Ezzel lehetségessé válik a Kvadromatikában olyannyira fontos önkölcsönhatás leírása. Az atomok és az elemi részecskék önfenntartó hullámcsomagok az éterben. Ennek leírására lett ez az egész kitalálva. A továbbiakban azt mutatom meg, hogyan lehet egy véges algebrát kódolni.

A hatás – reflektált hatás – újra reflektált hatás – … mechanizmust használjuk fel a Fí – algebrában akkor is, amikor egy algebrát modellezünk vele. Erre majd ott kitérünk. Ha megkér-deznék tőlem, mi a Kvadromatika lelke, egy mondattal azt felelném, hogy a tükrözve – tükrözés! Ez az ideoda – verődés teremti meg sok feladat megoldását, ahogy a Kvantum-fizikában is kedvelt módszer a Self – Consistent – Field (SCF) módszer! Pl. oldjuk meg a Fí – algebrában a $\psi \cdot \psi = \psi$ feladatot! A Fí – algebrát megadó táblázat első sora : 1 , 2 , 4 , 7 , 11 , 16 , 22 , 29 , 37 , 46 , 56 , 67 … ami azt jelenti, hogy
$\varphi_1 \cdot \varphi_0 = \varphi_0$, $\varphi_2 \cdot \varphi_0 = \varphi_1$, $\varphi_{22} \cdot \varphi_0 = \varphi_6$, … $\varphi_{46} \cdot \varphi_0 = \varphi_9$ … stb.
Minden más φ_k –val a szorzat = 0 . Most képezzük a következő vektort:
$\psi = 2\varphi_0 + \varphi_1 + 1/2\, \varphi_2 + 1/4\, \varphi_4 + 1/8\, \varphi_{11} + 1/16\, \varphi_{67} + 1/32\, \varphi_{2279} + \ldots$
Most számoljuk ki ezzel $\psi \cdot \psi$ –t! A sorban szereplő φ_k –k egyedül φ_0 –lal adnak járulékot, minden mással nulla a szorzat. Ja és $\varphi_0 \cdot \varphi_0 = 0$. Így ezt kapjuk:
$\psi \cdot \psi = \varphi_1 \cdot 2\varphi_0 + 1/2\, \varphi_2 \cdot 2\varphi_0 + 1/4 \varphi_4 \cdot 2\varphi_0 + 1/8\, \varphi_{11} \cdot 2\varphi_0 + 1/16\, \varphi_{67} \cdot 2\varphi_0 + 1/32\, \varphi_{2279} \cdot 2\varphi_0 \,..$
$= 2\varphi_0 + \varphi_1 + 1/2\, \varphi_2 + 1/4\, \varphi_4 + 1/8\, \varphi_{11} + 1/16\, \varphi_{67} + 1/32\, \varphi_{2279} + \ldots = \psi$!
Látjuk, olyan raffináltan konstruáltuk meg a ψ –t, hogy a $\varphi_k \cdot \varphi_0$ szorzatokból éppen a ψ φ_k –i kerekednek elő! A φ_k -k együtthatói 2 negatív hatványai, a mértani sor pedig eltolásra invariáns, csak egy konstanssal szorzódik, renormálható, ami a fraktáloknál egy gyakran használt módszer. A φ_k -k indexei pedig úgy adódnak, hogy ugyanazt a függvényt alkalmazom az eredményre, tehát a kimenetet mindig berakom a bemenetre, és ez épp a mandelprocessz lényege is! A függvény ebben az esetben az 1,2,4,7,11…et előállító m=n(n+1)/2 +1 függvény. n=1: m=2. n=2: m=2·3/2+1=4, n=4: m=4·5/2+1=11, n=11: m=11·12/2+1 = 67, n=67: m=67·68/2+1 = 2279 , … stb.

Látjuk, hogy mindig a kapott m –et rakjuk be n helyére. Hatás – reflektált hatás – újra reflektált hatás … stb. Ez a tükrözve-tükrözés elmélete. A tükörképek a végtelenből áradnak elő, és egy végtelen folyamot alkotnak. Ezt a folyamot egy egyszerű gráffal tudjuk ábrázolni:



Itt most a $2\varphi_0$, φ_1 , $1/2\, \varphi_2$, $1/4\, \varphi_4$, $1/8\, \varphi_{11}$, $1/16\, \varphi_{67}$, $1/32\, \varphi_{2279}$, . . . vektorokat egyszerűen a ψ_0 , ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 , ψ_4 , ... szimbólummal jelöltük. . . . .ψ_{12} a φ_0 –lal szorzódva előállítja ψ_{11} –et, ψ_{11} a φ_0 –lal szorzódva előállítja ψ_{10} –et, és így tovább, míg végül eljutunk a φ_0 –ig, amely már csak a 0 vektort állítja elő. Ez tehát egy önmagában áramló folyam, amely a végtelenből ered, ezért soha nem hal le. Így lesz a $\psi \cdot \psi = \psi$ feladat megoldása egy önfenntartó, önmagát előállító vektor. Minden dolog mélyén ez a mechanizmus munkálkodik. Most tetten értük a Teremtőt működés közben!

A Fí –algebra mint univerzális algebra ugyanígy működik. Vannak a modellezendő algebra A, B, C, D … elemei, és van ezek szorzótáblája, pl. $A\cdot A = B$, $A\cdot B = C$, $B\cdot D = E$ stb. Első lépésként mindegyik algebrai elemnek választunk egy ún, gyökérelemet a Fí – algebra nulladik sorából, így az A,B,C,D,E… elemeknek a $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_7, \varphi_{11}\ldots.$ elemeket választom. (Mellesleg a nulladik sor erre lett kitalálva). Ezután a rendszert bővítem olyan elemekkel, amelyek pl. az $A\cdot B = C$ tulajdonságot megvalósítják. A bővítést addig folytatom, míg minden megkívánt tulajdonság előáll. Így A,B,C… egy-egy végtelen sok tagból álló vektor lesz. Ez pontosan arra világít rá, hogy a tükrözve-tükrözés révén a véges dolgok mélyén is a Végtelen munkálkodik! A véges dolgok végtelen dolgokból tevődnek össze! A számok nem egyszerűen csak vannak: szüntelenül teremtődnek, keletkeznek, áramlanak, hatnak egymásra, tehát a számok világa is egy élő világ!

Az Univerzális Algebrai Modellezés Alapjai

Most először definiáljunk néhány segédfogalmat, ami megkönnyíti a munkánkat!

	0	1	2	3	4	5
0	1	2	4	7	11	16
1	3	5	8	12	17	23
2	6	9	13	18	24	31
3	10	14	19	25	32	40

Hát először is, vegyük szemügyre kedvenc táblázatunkat, és mondjuk meg, hogy az $A_{n\,k}$ szám éppen mennyi! Nos ez egy függvény lesz, mégpedig n és k függvénye. Nevezzük el ezt a függvényt $F_n(k)$ – nak, amely tehát n függvényében a k – hoz egy számot rendel! Tehát $F_n(k) = A_{n\,k}$, amelynek értéke:

$$F_n(k) = \frac{(n+k)^2 + 3n + k + 2}{2}$$

Példa: n = 3, k = 5 :

$$F_3(5) = \frac{(3+5)^2 + 3\cdot 3 + 5 + 2}{2} = \frac{64+9+7}{2} = 40$$

$\varphi_{A_{ij}} \cdot \varphi_i = \varphi_j$, tehát $\varphi_{40} \cdot \varphi_3 = \varphi_5$!

Ha tehát pl. $A = (\ldots\ \varphi_{40}\ \ldots)$ és $B = (\ldots \varphi_3\ \ldots)$, akkor $A\cdot B = (\ldots.\ \varphi_5 \ldots.)$ lesz.

Most egy algebra A, B, C … elemeit próbáljuk meg felépíteni.
Az algebra egy szorzótáblával van megadva, ahol pl. azt látjuk, hogy $A\cdot B = C$.
$B = (\ldots \varphi_3\ \ldots)$, és $C = (\ldots.\ \varphi_5 \ldots.)$.
Kérdés, milyen elemmel kell A-t bővíteni, hogy
$A\cdot(\ldots \varphi_3\ \ldots) = (\ldots.\ \varphi_5 \ldots.)$ legyen? A válasz: éppen a $\varphi_{A_{35}} = \varphi_{F_3(5)} = \varphi_{40}$ elemmel kell bővíteni! Ez megadja a kulcsot az önbővítgető eljáráshoz!

Most vegyük újra szemügyre azt az esetet, amikor a $\psi\cdot\psi = \psi$ feladatot oldottuk meg! Mit is csináltunk? Vettünk egy gyökérelemet, a φ_0 –t, és minden további elemet ennek a gyökérelemnek a sorából, tehát a nulladik sorból választottunk! Az így választott elemek egyedül a φ_0 –lal való szorzásnál adnak nem nulla járulékot, minden egyéb szorzatuk

nulla! Ez nagymértékben megkönnyíti a tervezést, mert sokkal kevesebb változóra kell csak odafigyelni. A Fí-algebrának ez a szellős szerkezete teszi lehetővé az univerzalitást! A szellősség itt azt jelenti, hogy a szorzatok túlnyomó többsége nulla, egész pontosan minden φ_k elem egyetlen egy másik φ_m elemmel ad nemnulla szorzatot, az összes többi szorzat nulla lesz! Az ember azt hinné, hogy az ilyen éppen csak felskiccelt szorzótáblában szinte minden nulla, így nincs is benne semmi érdekes. Azonban nem ez a helyzet! Amikor a szorzótáblával megadott struktúrát algebrává bővítjük, akkor megengedett elemek lesznek az elemek összegei is, sőt a végtelen összegeket is megengedjük, az ilyen végtelen összegek pedig már sokkal többet tudnak, mint a kiinduló φ_k elemek! Megjelenik az önfenntartás és az önreprodukálás képessége! És ha majd még egy picivel továbbmegyünk, azt is látni fogjuk, hogy ebben a világban az önteremtés képessége is megvan!!

Oldjuk meg újra a $\psi\cdot\psi = \psi$ feladatot, de most ne törődjünk a megoldás normájával!

Legyen a nulladik lépésben $\psi = \varphi_0$, tehát csak maga a gyökérelem!

Ekkor $\psi\cdot\psi = \varphi_0 \cdot \varphi_0 = 0$ mindössze, ez nekünk nem jó. Hozzuk létre legalább a φ_0 elemet!

Ehhez a φ_1 elemre lesz szükségünk, hiszen $\varphi_1 \cdot\varphi_0 = \varphi_0$!

Az új ψ - nk így néz ki: $\psi = \varphi_0 + \varphi_1$!

Most $\psi\cdot\psi = (\varphi_0 + \varphi_1)\cdot(\varphi_0 + \varphi_1) = \varphi_0\cdot\varphi_0 + \varphi_0\cdot\varphi_1 + \varphi_1\cdot\varphi_0 + \varphi_1\cdot\varphi_1 = \varphi_0$!

Egyedül a rózsaszínnel kiemelt tag ad járulékot. Na ez már egy lépés!

A következő lépéshez a φ_2 elemre lesz szükségünk, hiszen $\varphi_2 \cdot\varphi_0 = \varphi_1$!

Az új ψ - nk így néz ki: $\psi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2$!

Most $\psi\cdot\psi = (\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2)\cdot(\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2) =$

$= \varphi_0\cdot\varphi_0 + \varphi_0\cdot\varphi_1 + \varphi_0\cdot\varphi_2 + \varphi_1\cdot\varphi_0 + \varphi_1\cdot\varphi_1 + \varphi_1\cdot\varphi_2 + \varphi_2\cdot\varphi_0 + \varphi_2\cdot\varphi_1 + \varphi_2\cdot\varphi_2 =$

$= \varphi_0 + \varphi_1$, hiszen most csak a rózsaszín és narancs tag ad járulékot!

Az eljárást folytatva színre lép a φ_4, φ_{11}, φ_{67}, φ_{2279}, $\varphi_{2598061}$ elem is, a végtelenségig!

A φ_k–k indexei egy növekvő számsorozatot alkotnak, amit egy egyszerű szabály ad meg:

Láttuk, hogy $F_n(k) = A_{n\,k}$, és $(\ldots F_n(k)\ldots)(\ldots n\ldots) = (\ldots k\ldots)$ most a jelölésnél a φ szimbó-

lumot lespóroltam az egyszerűség kedvéért, látjuk hogy ψ - t éppen az $F_n(k)$ elemmel kell

bővítenünk, és mivel φ_0 a gyökérelem, **n = 0**, és így az $F_0(k)$ függvény kell nekünk.

$$F_0(k)=\frac{(0+k)^2+3\cdot 0+k+2}{2}=\frac{k^2+k+2}{2}=\frac{k(k+1)}{2}+1$$, e sorozat éppen a nulladik sort

adja meg nekünk. Ezt a függvényt állandóan az új meg új eredményre alkalmazzuk.

Vezessünk be egy új jelölést: Ha $\psi = (a\cdot\varphi_i + b\cdot\varphi_j + c\cdot\varphi_k + \ldots)$, akkor

$$F_n(\psi) = a\cdot\varphi_{F_n(i)} + b\cdot\varphi_{F_n(j)} + c\cdot\varphi_{F_n(k)} + \ldots$$

Ezzel a jelöléssel most már az eljárást is megadhatjuk, amivel a ψ - t létrehozzuk!

1.) Kiinduló érték: $\psi = \varphi_0$,

2.) eljárásciklus: $\psi := \varphi_0 + F_0(\psi)$! Azaz: Pszí legyen egyenlő $\varphi_0 + F_0(\psi)$!

Ezzel az eljárással az alábbi pszí – sorozatot kapjuk:

φ_0 ,

$\varphi_0 + F_0(\varphi_0) = \varphi_0 + \varphi_1$,

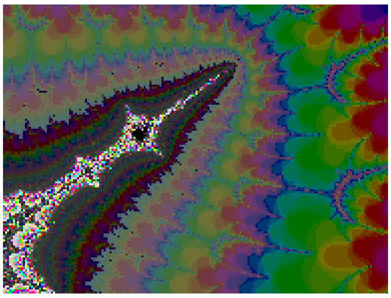
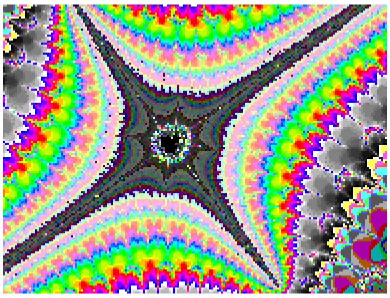
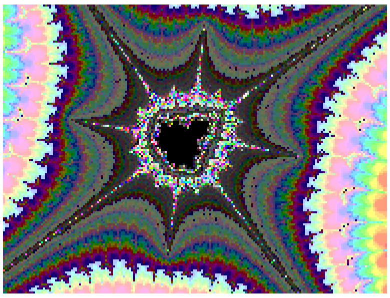
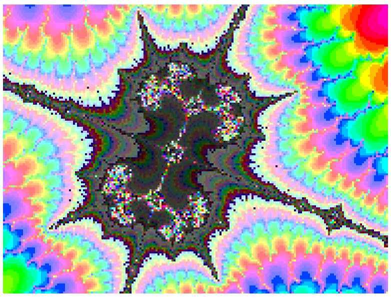
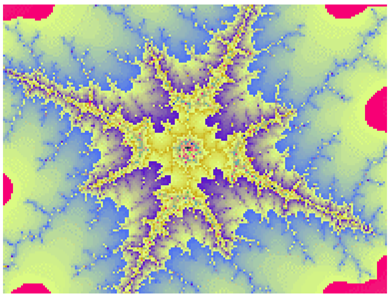
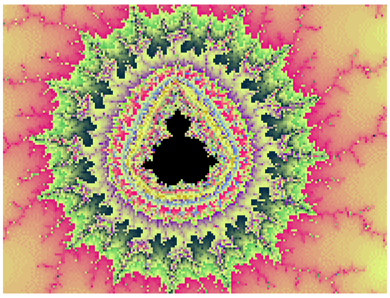
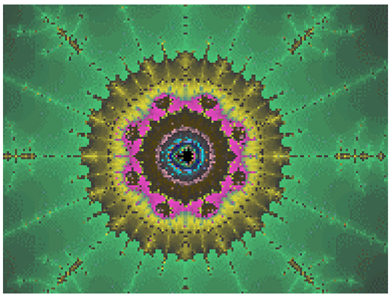
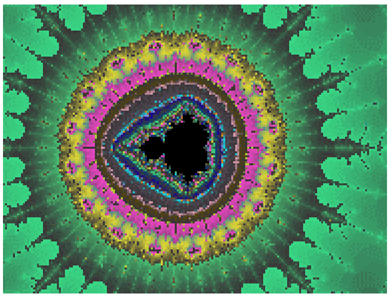
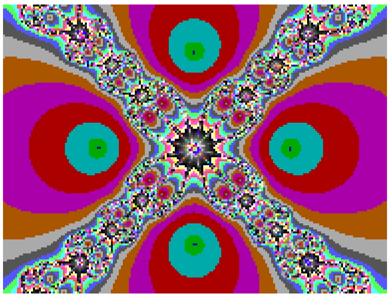
$\varphi_0 + F_0(\varphi_0 + \varphi_1) = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2$,

$\varphi_0 + F_0(\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2) = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_4$,

$\varphi_0 + F_0(\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_4) = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_4 + \varphi_{11}$, ... stb.

Az igazi pszít akkor kapjuk meg, ha ezt az eljárást a végtelenségig ismételjük!

Látjuk, hogy konstrukciónkban a végtelennek lényeges, sőt döntő szerep jut! Ennek köszönhető, hogy a vektoraink önfenntartóvá, önteremtővé válnak! Minden lényeges hatás a végtelenből árad ki, tehát van egy végtelen forrás, afféle csodakorsó, amiből kiömlik az egész Mindenség! A most kapott ψ nem normálható, illetve ez azt jelenti hogy a normája végtelen. Látni fogjuk, hogy a világunk két jól elkülönülő részre osztódik: a véges normájú vektorok világára és a végtelen normájú vektorok világára. Az operátorok szerepében szereplő elemek általában végtelen normájúak, míg a vektor szerepűek általában véges normájúak. A két világ közt azonban van átjárás! Az ún. nemkorlátos operátorok olyanok, hogy normált vektort végtelen normájú vektorba képezhetnek le. A kvantumfizikában ilyen a koordináta ($x\cdot$) operátor és az impulzus operátor is ($-i\hbar\, \partial/\partial_x$) Mint látni fogjuk, ennek óriási a jelentősége. Ha egy egyre normált ψ vektort nézek, amely végigfut a teljes végtelen dimenziós egységgömbön, akkor a nemkorlátos operátor általi leképezés bizonyos irányokban végtelenre nyújtja ezt a vektort, ez kinézetre olyan, mint mikor egy neuronból egy axon nyúlik ki egy másik neuron felé. És ez nemcsak formai hasonlat, mert ezzel a világunk egy gigászi neuronhálóhoz válik hasonlatossá, ahol a neuronok közt axonok és dendritek trilliói mennek oda-vissza, és ez nem más mint az Úristen agya! És ez az agy tudatos, értelmes, mi több, kommunikálni is lehet vele! Az egész matematikánk célja arra irányul, hogy felvegyük a kapcsolatot ezzel a hiper-szuper lénnyel! Ilyen dendritek és axonok láthatók az alábbi Mandelbrot – ábrákon is:

Most akkor definiáljuk a Hilbert-teret! A Hilbert-tér nem egyéb, mint egy végtelen dimenziós vektortér, amelyben a vektorok normálhatóak. A Hilbert-tér lehet valós vagy komplex, általában az utóbbit szokták Hilbert-térnek nevezni. A Hilbert-tér báziselemei a φ_0 , φ_1 , φ_2 , φ_3 . . . szimbólumok, ezekből tehát végtelen sok van, és a Hilbert-tér elemei ezek lineáris kombinációi, azaz a $\sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot \varphi_{í}$ összegek ahol a k_i –k komplex számok.

A $\psi = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot \varphi_{í}$ elem normája a $|\psi| = \sum_{i=1}^{\infty} |k_i|^2$ kifejezés.

Világos, hogy ha csak egy vagy véges sok φ_k együtthatója nem nulla, akkor a norma véges. Ha valós Hilbert-térről van szó, akkor a norma egyszerűen az együtthatók négyzetösszege (nem kell az abszolútérték). A Fí-algebra egy valós Hilbert-térnek felel meg. A komplexség egyszerűen modellezhető ebben a világban: egyszerűen megkettőzöm a báziselemeket, az első komponens a valós rész, a második a képzetes rész megfelelője. Ezért mi csak a valós Hilbert-térrel foglalkozunk.

Itt két megjegyzés is kínálkozik. Az első a kvadromatikus függetlenség. A Hilbert-térben két vektor, vagy ψ – függvény akkor lin független, ha a $\lambda_1 \cdot \psi_1 + \lambda_2 \cdot \psi_2 = 0$ egyenlet csak $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ paraméterekkel elégíthető ki. A kvadromatikus függetlenség a $\mathbf{K}$ –térben van értelmezve, ami abban különbözik a Hilbert –tértől, hogy nincs kikötve a normálhatóság, vagyis a végtelen nagy norma is megengedett. Ha ψ_1 és ψ_2 olyan, hogy mindkettő normája végtelen, akkor azt mondjuk, hogy $\psi_1 \in \mathbf{K}$, $\psi_2 \in \mathbf{K}$. Lehetséges azonban, hogy létezik olyan λ_1, λ_2 nemnulla konstans, hogy $\lambda_1 \cdot \psi_1 + \lambda_2 \cdot \psi_2 \in \mathbf{H}$! (ahol $\mathbf{H}$ a Hilbert-teret jelöli) . Ekkor mondjuk azt, hogy a ψ_1 és ψ_2 kvadromatikusan összefügg! Ha ilyen konstansok nincsenek, vagyis minden λ_1, λ_2 nemnulla konstans esetén $\lambda_1 \cdot \psi_1 + \lambda_2 \cdot \psi_2 \in \mathbf{K}$ akkor a ψ_1 és ψ_2 kvadromatikusan független. Értelemszerűen általánosítható ez véges számú ψ függvényre: ha n darab, ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 , $\psi_4 \ldots \psi_n$ függvényhez találunk olyan λ_1 , λ_2 , λ_3 , $\lambda_4 \ldots \lambda_n$ nem mind nulla konstanst, hogy $\lambda_1 \cdot \psi_1 + \lambda_2 \cdot \psi_2 + \lambda_3 \cdot \psi_3 + \ldots \lambda_n \cdot \psi_n \in \mathbf{H}$ akkor az n darab ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 , $\psi_4 \ldots \psi_n$ függvény kvadromatikusan összefügg, egyébként pedig kvadromatikusan független.

Hogy egy példát is mutassunk a dologra: legyen a ψ_1 végtelen vektor (1,1,1,1,1,1,1…), a ψ_2 végtelen vektor pedig (0,1,1,1,1,1,1…) , akkor $\psi_1 - \psi_2$ = (1,0,0,0,0…) , ez pedig $\in \mathbf{H}$, hiszen a normája 1! Ez a ψ_1 és ψ_2 tehát kvadromatikusan összefügg! Hasonlóan, ha ψ_3 = (1,2,2,2,2,2,2…) , akkor $2\psi_1 - \psi_3$ = (1,0,0,0,0…) , ez pedig megint csak $\in \mathbf{H}$, tehát ψ_1 és ψ_3 kvadromatikusan összefügg. Ellenben ha ψ_4 = (1,2,3,4,5,6,7…) , akkor ψ_4 mindhárom előzőtől kvadromatikusan független!

No, ez volt a kvadromatikus függetlenség, jelentősége a Fí-algebrában óriási.

És akkor egy ehhez kapcsolódó Kvadron-definíció: Legyen $\psi \in \mathbf{K}$ végtelen vektor. Adjuk hozzá a φ $\mathbf{H}$ –beli vektort, és φ fusson végig $\mathbf{H}$ összes elemén! Ekkor ψ + φ is végigfut egy $\mathbf{K}$ –beli összességen, ami egyfajta ψ-vel eltolt, $\mathbf{K}$-ba beágyazott $\mathbf{H}$-tér! Két ilyen vektor, mondjuk $\psi + \varphi_1$ és $\psi + \varphi_2$ kvadromatikusan összefügg, hiszen különbségük $\varphi_1 - \varphi_2 \in \mathbf{H}$!
Ezt a ψ –vel eltolt $\mathbf{H}$ –t nevezzük $\hat{\psi}$–nek, és ez a kvadron! Pszíkalap… jelölhetjük így is: $\psi + \mathbf{H}$, ami azt jelenti hogy a ψ –hez egy egész Hilbert-teret adunk hozzá!

A $\hat{\psi}$ nem egyéb, mint egy egész Világegyetem a ψ körül! Egy olyan Világegyetem, amely tőle nulla távolságra van a $\mathbf{K}$ –beli távolságértelemben. Tehát az epszilon megfelelője! Majd később látni fogjuk, hogy az omegák és epszilonok a Fí-algebrában is szükségképpen felbukkannak. Már eleve az hogy végtelen összegeket is megengedünk, sőt ezek a teória szerves részét képezik, maga után vonja hogy vannak végtelen normájú vektorok, és az ezekkel való szorzás behozza az omegát! Klasszikusan $\omega = 1+1+1+1+\ldots$
Ha $\psi = \varphi_1 + \varphi_3 + \varphi_6 + \varphi_{10} + \varphi_{15} + \ldots$, és $\Omega = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \ldots$, akkor $\psi \cdot \Omega = (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots) \times \varphi_0 = \omega \cdot \varphi_0$ lesz!

Most visszatérve a norma kérdésére, elemezzük a $\psi\cdot\psi = \psi$ megoldását a norma szerint is!

Ha $\psi = 2\,\varphi_0 + \varphi_1 + 1/2\,\varphi_2 + 1/4\,\varphi_4 + 1/8\,\varphi_{11} + 1/16\,\varphi_{67} + 1/32\,\varphi_{2279} + \ldots$, akkor

ψ normája $\sqrt{2^2+1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{16}\right)^2+\ldots\ldots} = 2\cdot\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{16}\right)^2+\ldots\ldots} =$

$= \frac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ **lesz, azaz kb 2.309401077 . Van-e a $\psi\cdot\psi = \psi$ -nek egyre normált megoldása?**

Világos, hogyha $\psi\cdot\psi = \psi$, akkor $(k\cdot\psi)\cdot(k\cdot\psi) = (k\cdot k)\cdot\psi = k\cdot(k\cdot\psi)$, tehát $k\cdot\psi$ a $\psi\cdot\psi = k\cdot\psi$ egy megoldása lesz. Ha a ψ normája n, akkor k = 1/n választással a $\psi\cdot\psi = \psi/n$ egy egyre normált megoldását kapjuk, csakhogy nem egészen ezt kerestük!

A fenti ψ –ben a 2 hatványai szerepeltek. Ha 2 helyett pl x van, akkor

$\psi = x\cdot\,\varphi_0 + \varphi_1 + 1/x\,\varphi_2 + 1/x^2\,\varphi_4 + 1/x^3\,\varphi_{11} + 1/x^4\,\varphi_{67} + 1/x^5\,\varphi_{2279} + \ldots$,

és ennek a normája $\frac{x}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ **lesz. Ez a minimumát az x =** $\sqrt{2}$ **helyen veszi fel, és**

a minimum értéke 2. Ennél kisebb normájú ψ nem elégítheti ki a $\psi\cdot\psi = \psi$ egyenletet!

Ha a $\cdot\,\varphi_0$ helyett más gyökérelemet választunk, egy másik megoldást kapunk.

Legyen most ψ_1 , ψ_2 két olyan megoldás, hogy $\psi_1\cdot\psi_2 = \psi_2\cdot\psi_1 = 0$! Ekkor

$(\psi_1+\psi_2)\cdot(\psi_1+\psi_2) = \psi_1\cdot\psi_1 + \psi_2\cdot\psi_2 = \psi_1+\psi_2$, mert a vegyes szorzatok kiesnek.

Látjuk tehát hogy az összeg is megoldása a $\psi\cdot\psi = \psi$ egyenletnek! No és mennyi a

normája? $\sqrt{\left|\psi_1\right|^2+\left|\psi_2\right|^2}$ **! Ez pedig nem kisebb, mint a normák külön-külön.**

Látjuk hogy nem tudunk a 2-es norma alá menni, ez olyan mint az entrópia, csak nőni tud, csökkenni nem. Hogy van-e ennek jelentősége, majd később meglátjuk.

Most visszatérünk az algebrák modellezésének kérdésére.

Álljon az algebránk az A, B, C elemekből, és legyen a szorzótáblája ez:

	A	B	C
A	A	C	B
B	C	B	A
C	B	A	C

Eszerint A·A = A, A·B = C, A·C = B ,stb.

Az első lépésként gyökérelemet választunk: φ_A , φ_B , φ_C –t.

A gyökérelemeket a nulladik sorból választjuk.

Legyen pl. $\varphi_A = \varphi_1, \varphi_B = \varphi_2, \varphi_C = \varphi_4$!

Ennek megfelelően $A = \varphi_A$, $B = \varphi_B$, $C = \varphi_C$ a kezdőértékek.

A következő lépés a bővítés: pl. $A \cdot B = C$ –nek megfelelően az A elemet olyan φ_X elemmel

Bővítjük, amelyre $\varphi_X \cdot \varphi_B = \varphi_C$! Ez akkor teljesül, ha $X = F_B(C)$!

Ennek megfelelően az alábbi ciklusműveletekre van szükség:

$A := \varphi_A + F_A(A) + F_B(C) + F_C(B)$,

$B := \varphi_B + F_A(C) + F_B(B) + F_C(A)$,

$C := \varphi_C + F_A(B) + F_B(A) + F_C(C)$.

Itt is a := „legyen egyenlő" utasítás szerepel, tehát a baloldalnak a jobboldal értékét adjuk. A ciklus első végrehajtásakor 3 új elemmel bővül mindhárom elem. A második végrehajtáskor már $3 \cdot 3 = 9$ elemmel bővülnek, aztán 27 elemmel, stb. A ciklust a végtelen-ségig folytatva az A, B, C elem olyan lesz, hogy

$A = \varphi_A + F_A(A) + F_B(C) + F_C(B)$,

$B = \varphi_B + F_A(C) + F_B(B) + F_C(A)$,

$C = \varphi_C + F_A(B) + F_B(A) + F_C(C)$.

Immáron nem „legyen egyenlő" szerepel, hanem rendes egyenlőség!

Figyeljük meg az indexek és argumentumok logikáját is:

Ha $C \cdot A = B$, akkor $C = \ldots\ldots + F_A(B) \ldots\ldots$

Ezzel a módszerrel tetszőleges, véges szorzótáblával megadott algebrát elő tudok állítani!

Nézzük meg konkrétan, számokkal is a kódolás módját!

Legyen $\varphi_A = \varphi_1, \varphi_B = \varphi_2, \varphi_C = \varphi_4$!

Ennek megfelelően az $F_A(k)$, $F_B(k)$, $F_C(k)$ függvényeket is meghatározzuk:

$F_A(k) = F_1(k) = \dfrac{(1+k)^2+3\cdot 1+k+2}{2} = \dfrac{k^2+3k+6}{2} = \dfrac{k\cdot(k+3)+6}{2}$

$F_B(k) = F_2(k) = \dfrac{(2+k)^2+3\cdot 2+k+2}{2} = \dfrac{k^2+5k+12}{2} = \dfrac{k\cdot(k+5)+12}{2}$

$F_C(k) = F_4(k) = \dfrac{(4+k)^2+3\cdot 4+k+2}{2} = \dfrac{k^2+9k+30}{2} = \dfrac{k\cdot(k+9)+30}{2}$

A továbbiakban a φ szimbólumot egyszerűen elhagyom, és csak a számokat írom.

Kiindulási értékek:

A = 1
B = 2
C = 4

Első ciklus után:

A = 1 , F_A (A) , F_B (C) , F_C (B) = 1 , F_1 (1) , F_2 (4) , F_4 (2) = 1 , 5 , 24 , 26

B = 2 , F_A (C) , F_B (B) , F_C (A) = 1 , F_1 (4) , F_2 (2) , F_4 (1) = 2 , 17 , 13 , 20

C = 4 , F_A (B) , F_B (A) , F_C (C) = 1 , F_1 (2) , F_2 (1) , F_4 (4) = 4 , 8 , 9 , 41 .

A következő ciklusban 9 – 9 új szám generálódik , és az eredmény így alakul:

A = 1, 5 , 24 , 26 , 23 , 327 , 380 , 58 , 69 , 949 , 236 , 158 , 305
B = 2, 17 , 13 , 20 , 47 , 57 , 905 , 193 , 123 , 256 , 50 , 411 , 470
C = 4, 8 , 9 , 41 , 173 , 107 , 233 , 31 , 354 , 409 , 332 , 96 , 1040

Addig ne is menjünk tovább, amíg jó alaposan át nem tanulmányoztuk ezt a példát, és mindent számoljunk utána. Az A sorában pl. a 23, 327, 380 számok az F_A (A) eredményei ahol az A = 5, 24, 26 lett bepakolva a függvény hasába:

$\dfrac{5(5+3)+6}{2} = 23$, $\dfrac{24(24+3)+6}{2} = 327$, $\dfrac{26(26+3)+6}{2} = 380$.

Az 58, 69, 949 számok az F_B (C) eredményei , ahol a 8, 9, 41 számokat tesszük a függvény hasába, a 236, 158, 305 számok pedig az F_C (B) eredményei, ahol a 17, 13, 20 számokat tesszük a függvény hasába. Számoljunk utána!

Ha már jól elsajátítottuk a módszert és megértettük, hogyan működik, léphetünk tovább.

Modellezzünk most olyan algebrát, ahol az együtthatók nem mind egyek!

Ennek legyegyszerűbbike a BIOR nevű nemasszociatív de kommutatív algebra, amelyet a következőképpen generálunk:

$A \cdot A = B$
$A \cdot B = A$
$B \cdot A = A$
$B \cdot B = -B$

Az algebra elemei az $x \cdot A + y \cdot B$ alakú számok, ahol x , y valós együtthatók.

Látjuk, hogy $B \cdot B = -B$, tehát megjelent egy mínusz előjel.

Első lépésként itt is gyökérelemeket választunk: $\varphi_A = \varphi_1$, $\varphi_B = \varphi_2$.

Utána felírjuk a generáló ciklust:

$$A = \varphi_A + F_A(B) + F_B(A)$$

$$B = \varphi_B + F_A(A) - F_B(B)$$

Látjuk, hogy a B sorában megjelenik a mínusz előjel.

A továbbiakban minden úgy megy ahogy megtanultuk, csak ügyelni kell az előjelekre.

$$A = \varphi_1 + F_1(B) + F_2(A)$$

$$B = \varphi_2 + F_1(A) - F_2(B)$$

$$F_1(k) = \frac{k \cdot (k+3)+6}{2} \; , \quad F_2(k) = \frac{k \cdot (k+5)+12}{2} \; .$$

$A = 1 \quad 8 \quad 9 \quad 23 \quad \underline{107} \quad 58 \quad 69 \quad 1178 \quad 1713 \quad \underline{530} \quad 7752 \quad 328 \quad \underline{5998} \quad 1833 \quad 2559$

$B = 2 \quad 5 \quad \underline{13} \quad 47 \quad 57 \quad \underline{31} \quad 123 \quad 302 \quad \underline{5888} \quad 1772 \quad 2487 \quad \underline{1228} \quad \underline{1773} \quad 564 \quad \underline{7878}$

Az aláhúzott számok negatív komponenseket jelölnek. Ennek megfelelően

$$A = \varphi_1 + \varphi_8 + \varphi_9 + \varphi_{23} - \varphi_{107} + \varphi_{58} + \varphi_{69} + \varphi_{1178} + \varphi_{1713} - \varphi_{530} + \varphi_{7752} + \ldots$$

$$B = \varphi_2 + \varphi_5 - \varphi_{13} + \varphi_{47} + \varphi_{57} - \varphi_{31} + \varphi_{123} + \varphi_{302} - \varphi_{5888} + \varphi_{1772} + \varphi_{2487} + \ldots$$

Látjuk, hogy a Bior két alapeleme előáll mint végtelen összeg.

A következő lépés olyan algebra modellezése, ahol már a szorzótáblában valós szorzótényezők is szerepelnek.

Álljon tehát az algebránk az A, B, C elemekből, és legyen a szorzótáblája ez:

	A	B	C
A	2A	3C	5B
B	4C	6B	7A
C	8B	9A	C

Eszerint $A\cdot A = 2A$, $A\cdot B = 3C$, $A\cdot C = 5B$,stb.

Az első lépésként gyökérelemet választunk: φ_A , φ_B , φ_C –t.

$$A = \varphi_A + 2\cdot F_A(A) + 3\cdot F_B(C) + 5\cdot F_C(B) \,,$$

$$B = \varphi_B + 4\cdot F_A(C) + 6\cdot F_B(B) + 7\cdot F_C(A) \,,$$

$$C = \varphi_C + 8\cdot F_A(B) + 9\cdot F_B(A) + F_C(C) \,.$$

A gyökérelem megválasztása után:

$$A = \varphi_1 + 2\cdot F_1(A) + 3\cdot F_2(C) + 5\cdot F_4(B) \,,$$

$$B = \varphi_2 + 4\cdot F_1(C) + 6\cdot F_2(B) + 7\cdot F_4(A) \,,$$

$$C = \varphi_4 + 8\cdot F_1(B) + 9\cdot F_2(A) + F_4(C) \,.$$

$$F_1(k) = \frac{k\cdot(k+3)+6}{2} \,, \quad F_2(k) = \frac{k\cdot(k+5)+12}{2} \,, \quad F_4(k) = \frac{k\cdot(k+9)+30}{2} \,.$$

Együtthatók nélkül, csak a φ –k indexei így alakulnak:

A = 1,	5 , 24 , 26 ,	23 , 327 , 380 ,	58 , 69 , 949 ,	236 , 158 , 305
B = 2,	17 , 13 , 20 ,	47 , 57 , 905 ,	193 , 123 , 256 ,	50 , 411 , 470
C = 4,	8 , 9 , 41 ,	173 , 107 , 233 ,	31 , 354 , 409 ,	332 , 96 , 1040

Most hozzávesszük az együtthatókat is:

$$A = \varphi_1 + 2\cdot\varphi_5 + 3\cdot\varphi_{24} + 5\cdot\varphi_{26} + 2\cdot2\cdot\varphi_{23} + 2\cdot3\cdot\varphi_{327} + 2\cdot5\cdot\varphi_{380} + 3\cdot8\cdot\varphi_{58} + 3\cdot9\cdot\varphi_{69} +$$

$$B = \varphi_2 + 4\cdot\varphi_{17} + 6\cdot\varphi_{13} + 7\cdot\varphi_{20} + 4\cdot8\cdot\varphi_{47} + 4\cdot9\cdot\varphi_{57} + 4\cdot\varphi_{905} + 6\cdot4\cdot\varphi_{193} + 6\cdot6\cdot\varphi_{123} +$$

$$C = \varphi_4 + 8\cdot\varphi_8 + 9\cdot\varphi_9 + \varphi_{41} + 8\cdot4\cdot\varphi_{173} + 8\cdot6\cdot\varphi_{107} + 8\cdot7\cdot\varphi_{233} + 9\cdot2\cdot\varphi_{31} + 9\cdot3\cdot\varphi_{354} +$$

Látjuk hogy az együtthatók hogyan következnek egymás után…

A módszer megmutatja az utat a nem egész valós együtthatókhoz is.

Addig semmiképpen se lépjünk tovább, amíg ezt a példát alaposan át nem tanulmányoztuk és minden ízében meg nem értettük!

Most következzen az algebránknak egy csodálatos tulajdonsága, mégpedig az, hogy önmagát is modellezni tudja! Vagyis konstruálhatók olyan Φ_0 , Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 . . . elemek, amelyek szakasztott ugyanazt tudják, mint a φ_0 , φ_1 , φ_2 , φ_3 . . . elemek!

A dolgot megint azzal kezdjük, hogy gyökérelemeket választunk, de ezúttal végtelen darabot kell választani, legyenek ezek a nulladik sor elemei, φ_2-től kezdődően!

Hogy mért éppen a φ_2-től kezdődően, azt majd később meglátjuk, a φ_1–et valami speciális szerepre tartogatjuk fent!

A megvalósítandó szorzótábla:

$\Phi_1 \cdot \Phi_0 = \Phi_0$

$\Phi_2 \cdot \Phi_0 = \Phi_1$

$\Phi_3 \cdot \Phi_1 = \Phi_0$

$\Phi_4 \cdot \Phi_0 = \Phi_2$

$\Phi_5 \cdot \Phi_1 = \Phi_1$

$\Phi_6 \cdot \Phi_2 = \Phi_0$

$\Phi_7 \cdot \Phi_0 = \Phi_3$

$\Phi_8 \cdot \Phi_1 = \Phi_2$

$\Phi_9 \cdot \Phi_2 = \Phi_1$

$\Phi_{10} \cdot \Phi_3 = \Phi_0$

Ennek megfelelően az elemek így alakulnak:

$\Phi_0 = \varphi_2$

$\Phi_1 = \varphi_4 + F_2(\Phi_0) = \varphi_4 + F_2(\varphi_2) = \varphi_4 + \varphi_{13}$

$\Phi_2 = \varphi_7 + F_2(\Phi_1) = \varphi_7 + F_2(\varphi_4 + \varphi_{13}) = \varphi_7 + \varphi_{24} + \varphi_{123}$

$\Phi_3 = \varphi_{11} + F_4(\Phi_0) = \varphi_{11} + F_4(\varphi_2) = \varphi_{11} + \varphi_{26}$

$\Phi_4 = \varphi_{16} + F_2(\Phi_2) = \varphi_{16} + F_2(\varphi_7 + \varphi_{24} + \varphi_{123}) = \varphi_{16} + \varphi_{48} + \varphi_{354} + \varphi_{7878}$

$\Phi_5 = \varphi_{22} + F_4(\Phi_1) = \varphi_{22} + F_4(\varphi_4 + \varphi_{13}) = \varphi_{22} + \varphi_{41} + \varphi_{158}$

$\Phi_6 = \varphi_{29} + F_7(\Phi_0) = \varphi_{29} + F_7(\varphi_2) = \varphi_{29} + \varphi_{53}$

$\Phi_7 = \varphi_{37} + F_2(\Phi_3) = \varphi_{37} + F_2(\varphi_{11} + \varphi_{26}) = \varphi_{37} + \varphi_{94} + \varphi_{409}$

$\Phi_8 = \varphi_{46} + F_4(\Phi_2) = \varphi_{46} + F_4(\varphi_7 + \varphi_{24} + \varphi_{123}) = \varphi_{46} + \varphi_{71} + \varphi_{411} + \varphi_{8133}$

$\Phi_9 = \varphi_{56} + F_7(\Phi_1) = \varphi_{56} + F_7(\varphi_4 + \varphi_{13}) = \varphi_{56} + \varphi_{74} + \varphi_{218}$

$\Phi_{10} = \varphi_{67} + F_{11}(\Phi_0) = \varphi_{67} + F_{11}(\varphi_2) = \varphi_{67} + \varphi_{103}$

Látjuk, hogy itt minden elem véges számú tagból áll. Ez azért van, mert minden Φ_k csak egy másikkal ad nem nulla szorzatot. A Φ_k világban újra lehet modellezni a Fí-algebrát, és ezzel egy valódi Matrjoska-világ jön létre! Végtelen darab egymásba ágyazott Fí-algebra! Ez az egymásba ágyazott Univerzumsokaság azóta kísért engem, amióta 70-ben olvastam Stanisław Lem történetét Corcoran professzorról, és a ládáiról. Bin Láden = bináris ládák! Na eme kis lazítás után rátérhetünk a Fí-algebra legnehezebb fejezetére: hogyan kell végtelen szorzótáblájú algebrát modellezni?! A gondot az okozza, hogy most végtelen felsorolások következnek egymás után, aztán végtelenszer végtelen felsorolások, és így tovább, és ezt kéne egyetlen felsorolásban megadni, méghozzá úgy hogy legalább elvben ki tudjuk számolni bármelyik tagot!

$A = \varphi_A + F_A(A) + F_B(C) + F_C(B)$ volt a kiinduló példánkban, most az algebrai elemek

Egy végtelen sorozata van: A_k, ahol k = 1, 2, 3, 4, 5, … és a generáló összefüggés

$A_k = \varphi_{A_k} + F_{A_1}(A_{k1}) + F_{A_2}(A_{k2}) + F_{A_3}(A_{k3}) + \ldots.$ valami ilyesmi lesz.

Az első lépésben a gyökérelemeket választjuk meg, a nulladik sorból, ezzel nincs baj.

De a második lépésben már az $F_{A_1}(A_{k1}) + F_{A_2}(A_{k2}) + F_{A_3}(A_{k3}) + \ldots.$ egy végtelen tagú összeg lesz, utána pedig az $F_{A_1}(A_{k1})$ tagok külön-külön is végtelenek lesznek, tehát végül is egy végtelen + végtelen·végtelen + végtelen·végtelen·végtelen + ... típusú összeggel lesz dolgunk! Szeretnénk mi ezt egyetlen végtelen összegként kifejezni!

Itt segítenek nekünk majd a prímek!

Segédfeladatként oldjuk meg a következőt: Legyen egy D_k végtelen vektorunk, egy D_{km} végtelen·végtelen mátrixunk, egy D_{kmn} végtelen·végtelen·végtelen 3 indexes mátrixunk, stb és ezek elemeit soroljuk fel egyetlen végtelen sorozatban!

A sorozat valahogy így fog festeni: D_1 , D_{21} , D_2 , D_{111} , D_{42} , D_3 , D_{14} , D_{211} , D_{3122} , D_4 , D_{15} , és így tovább. Hogy adjuk meg azt a függvényt, ami az indexeket generálja?

A prímszámok sorozata így indul: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59

Egy szám így írható fel: $n = p_1^{\alpha 1} \cdot p_2^{\alpha 2} \cdot p_3^{\alpha 3} \cdot p_4^{\alpha 4} \cdot \ldots p_r^{\alpha r}$, itt a prímek növekvő sorrendben vannak, így p_r a legnagyobb prím. Szerepeltessük p_r –ig az összes prímet, és amelyik nem szerepel n felbontásában, ahhoz a 0 kitevőt rendeljük. Így az n szám az $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_r$ számvektorral is reprezentálható. Pl 105 = 3·5·7 = $2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$ = (0, 1, 1, 1) vektor, 26 = 2 ·13 = (1, 0, 0, 0, 0, 1) ,stb. Látjuk hogy az utolsó szám sohasem nulla. Most módosítsuk a vektort úgy, hogy az utolsó kivételével minden számot megnövelünk 1-gyel! Ekkor 105 = (1, 2, 2, 1) lesz, és 26 = (2, 1, 1, 1, 1, 1) lesz. Ez az átkódolás oda-vissza egyértelmű. Eltűntek a zavaró nullák. Most tesszük meg a döntő lépést:

feleltessük meg az (a, b, c, d, …) vektorú számnak a $D_{abcd\ldots}$ mátrixelemet! Ez más szóval

azt jelenti, hogy a $D_{abcd\ldots}$ mátrixelem a felsorolásban éppen arra a helyre kerül, aminek a vektora éppen (a, b, c, d, …) ! Ez a felsorolás egyértelmű, és minden számhoz hozzá van rendelve valamilyen mátrixelem. Kivétel az 1, ahhoz a φ_A gyökérelemet rendeljük!

Ezzel megoldottuk a felsorolást. Így fog kinézni:

2 = (1), 3 = (1, 1), 4 = (2), 5 = (1, 1, 1), 6 = (2, 1), 7 = (1, 1, 1, 1), 8 = (3), 9 = (1, 2), …

tehát a felsorolás: φ_A , D_1, $D_{1\,1}$, D_2, $D_{1\,1\,1}$, $D_{2\,1}$, $D_{1\,1\,1\,1}$, D_3, $D_{1\,2}$, $D_{2\,1\,1}$, ...

Most az a kérdés, hogy mi felel meg az egyes $D_{abcd\ldots}$ mátrixelemeknek?

$A_1 = \varphi_{A_1} + F_{A_1}(A_2) + F_{A_2}(A_3) + F_{A_3}(A_4) + \ldots$

$A_2 = \varphi_{A_2} + F_{A_1}(A_3) + F_{A_2}(A_4) + F_{A_3}(A_1) + \ldots$

$A_3 = \varphi_{A_3} + F_{A_1}(A_4) + F_{A_2}(A_1) + F_{A_3}(A_2) + \ldots$

$A_4 = \varphi_{A_4} + F_{A_1}(A_1) + F_{A_2}(A_2) + F_{A_3}(A_3) + \ldots$

. . . . . .

legyen az egyszerűség kedvéért ez az algebránk generáló egyenlete!

A gyökérelemek: $\varphi_{A_1} = \varphi_1$, $\varphi_{A_2} = \varphi_2$, $\varphi_{A_3} = \varphi_4$, $\varphi_{A_4} = \varphi_7$, $\varphi_{A_5} = \varphi_{11}$, . . .

Egy célszerű jelölés bevezetése: $F_A(\varphi_B)$ –t jelöljük így: φ_{AB} !

Ekkor $F_A(F_B(\varphi_C)) = \varphi_{ABC}$, és $F_A(F_B(F_C(\varphi_D))) = \varphi_{ABCD}$, stb.

Ezzel a jelöléssel könnyebb felírni a szukcesszíve bővülő elemeket.

Sőt a fí is elhagyható, és φ_{ABCD} helyett simán ABCD írható.

$A_1 = \varphi_{A_1} + F_{A_1}(A_2) + F_{A_2}(A_3) + F_{A_3}(A_4) + \ldots =$

$= \varphi_{A_1} + F_{A_1}(\varphi_{A_2}) + F_{A_2}(\varphi_{A_3}) + F_{A_3}(\varphi_{A_4}) + \ldots + F_{A_1}(F_{A_1}(A_3) + F_{A_2}(A_4) +$

$+ F_{A_3}(A_1) + \ldots) + F_{A_2}(F_{A_1}(A_4) + F_{A_2}(A_1) + F_{A_3}(A_2) + \ldots) +$

$+ F_{A_3}(F_{A_1}(A_1) + F_{A_2}(A_2) + F_{A_3}(A_3) + \ldots) + \ldots$

$A_1 = A_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \ldots, A_1A_1A_3, A_1A_2A_4, A_1A_3A_1, \ldots A_2A_1A_4, A_2A_2A_1, A_2A_3A_2$