Lótusz Kútja

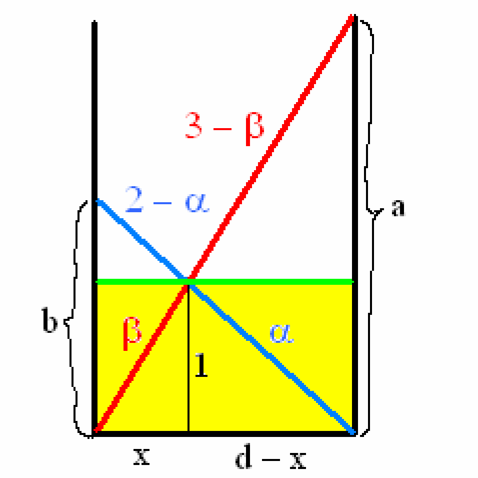
A mese a következő:

A régi Egyiptomban a tanítványokat az alábbi végső beavatásnak vetették alá:

A tanítványt befalazták egy barlangba, csak akkora nyílást hagytak neki hogy azon az ételt beadhassák neki. A barlang közepén volt egy kút. A kútba két bot volt támasztva, az egyik 2 méter, a másik 3 méter hosszú volt, a kútban pedig víz volt, mégpedig éppen 1 méter magasan. A két bot a kút két átellenes falának támaszkodott, mégpedig úgy, hogy éppen a víz szintjénél keresztezték egymást. A tanítvány feladata az volt, hogy ezen ismeretek birtokában határozza meg a kút átmérőjét, mégpedig adott pontossággal (pl. 4 tizedesjegy pontossággal). Addig nem jöhetett ki, amíg ezt a feladatot el nem végezte. Mindennap, mikor az ételét megkapta, megkérdezték tőle, hogy tudja – e a választ. Ha nem, akkor még egy napig bent maradt. Egy palatáblán kellett átnyújtania a végeredményt. Ha a válasz rossz volt, akkor tovább kellett maradnia. Ha nem tudta kiszámolni, akkor otthagyták őt végleg befalazva, és így is halt meg.

Az egyiptomiak egységtörtekkel számoltak, így a válasz valahogy így nézhetett ki: $d = 1 + 1/16 + 1/5124 + 1/36352$. Ez talán már elég volt a kellő pontossághoz. Mert, mint látni fogjuk, a feladat szokatlanul bonyolult, és teljes negyedfokú egyenletre vezet. Negyedfokú egyenletet pedig még mi se nagyon tudunk megoldani, az egyiptomiak meg pláne, bár ki tudja, milyen régi trükkjeik lehettek. Most ennek a kiszámítását próbáljuk meg rekonstruálni.

Először is, ábrát készítünk a feladathoz.



Az ábra birtokában felírhatjuk az alapvető összefüggéseket:

1.) $d^2 + a^2 = 9$

2.) $d^2 + b^2 = 4$

3.) $x^2 + 1 = \beta^2$

4.) $(d - x)^2 + 1 = \alpha^2$

5.) $x^2 + (b - 1)^2 = (2 - \alpha)^2$

6.) $(d - x)^2 + (a - 1)^2 = (3 - \beta)^2$

Látjuk, 6 egyenletünk van a 6 ismeretlenre: d, x, a, b, α, β.

Most ha jobban odafigyelünk, két hasonló háromszöget pillantunk meg:

az a – α – (3 – β) és a b – β – (2 – α) háromszögeket.

Ezek segítségével az alábbi aránypárokat tudjuk felírni:

7.) $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{2-\alpha} = \frac{3-\beta}{\beta} = \frac{d-x}{x}$.

Vezessük be a hasznos $z = \frac{a}{b}$ jelölést!

Ezzel az alábbi egyenleteket tudjuk felírni:

8.) $d - x = z \cdot x$,

9.) $3 - \beta = z \cdot \beta$, tehát $3 = (z + 1) \cdot \beta$, tehát $\beta = \frac{3}{z+1}$,

10.) $\alpha = (2 - \alpha) \cdot z$, tehát $\alpha \cdot (1 + z) = 2 \cdot z$, tehát $\alpha = \frac{2 \cdot z}{1+z}$,

11.) $x^2 + 1 = \beta^2 = \frac{9}{(1+z)^2}$, 12.) $(d-x)^2+1=\alpha^2$, tehát $z^2\cdot x^2+1=\frac{4\cdot z^2}{(1+z)^2}$,

13.) $x^2=\frac{9-(1+z)^2}{(1+z)^2}=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{4\cdot z^2-(1+z)^2}{(1+z)^2}$.

Ebből az egyenletből az alábbi egyenletet kapjuk z – re:

14.) $9-(1+z)^2=4-\left(\frac{1}{z}+1\right)^2$. Átrendezve és egyszerűsítve:

15.) $5-1-z^2-2\cdot z+\frac{1}{z^2}+1+\frac{2}{z}=0$, azaz

16.) $z^4+2\cdot z^3-5\cdot z^2-2\cdot z-1=0$.

Na íme a teljes negyedfokú egyenlet!

Most 1.) – ből és 2.) – ből ez adódik:

17.) $d^2=9-a^2=4-b^2$, azaz $5=a^2-b^2=b^2\cdot(z^2-1)$, $b^2=\frac{5}{z^2-1}$.

18.) $d^2=4-b^2=4-\frac{5}{z^2-1}$, tehát $d=\sqrt{4-\frac{5}{z^2-1}}$.

Láthatjuk, hogy z ismeretében d számítható.

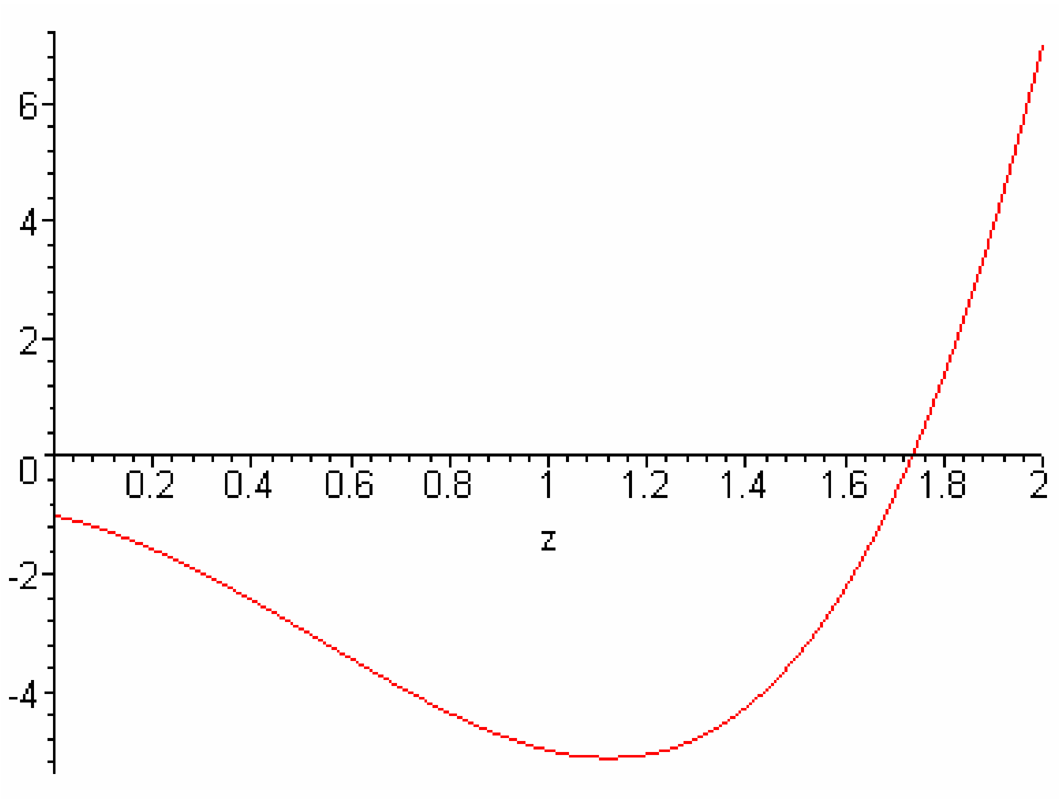
Na jó, jó, de hogyan határozzuk meg a z – t?

És pláne, hogyan határozhatták meg az egyiptomiak?

Rajzoltassuk ki a függvényt a Maple 7 program segítségével!

```
plot(z^4+2*z^3-5*z^2-2*z-1,z=0..2);
```

Az eredmény az alábbi lesz:



Mint látjuk, a görbének valahol 1.73 környékén, azaz $\sqrt{3}$ környékén van a zérusa. Induljunk tehát ki a z1 = $\sqrt{3}$ kezdőértékből!

Ekkor ezt kapjuk:

f(z1) = 9 + 6$\cdot\sqrt{3}$ – 15 – 2$\cdot\sqrt{3}$ – 1 = – 0.071796769 , kisebb mint 0.

A gyök tehát picit nagyobb, mint $\sqrt{3}$. De mennyivel nagyobb?

$\sqrt{3}$ = 1.732050808, próbáljuk meg pl. a z2 = 1.733 – at!

Erre f(z2) = – 0.053300508, még mindig negatív. Túl kicsit léptünk.

Lépjünk bátrabban, és legyen z3 = 1.74!

Erre f(z3) = + 0.084409759 már pozitív, túl nagyot léptünk!

Most legyen z4 a z2 és a z3 átlaga, azaz $\frac{1.733+1.74}{2}$! Tehát z4 = 1.7365!

f(z4) = + 0.015266608, pozitív.

Most lefelé lépünk, z2 irányába, de csak egy kicsit, mert f(z4) már csak százalék nagyságú. f(z2) nagysága kb 3 – szorosa f(z4) – nek, így a különbség egyharmadával fogunk lépni: z5 = $z4-\frac{z4-z2}{3}$ = 1.7353333333.

f(z5) = – 0.007652987 , negatív lett. Túl nagyot léptünk.

Most próbáljunk meg kisebbet lépni: z6 = 1.736 .

f(z6) = + 0.005436092. Most legyen z7 = 1.7355.

f(z7) = – 0.004382674. z8 = z6 és z7 átlaga = 1.73575.

f(z8) = 0.00052524. z9 legyen 1.7357.

f(z9) = – 0.000456577, negatív. z10 legyen z8 és z9 átlaga: 1.735725.

f(z10) = + 0.000034316.

Látjuk, hogy ezzel az ideoda lépkedéssel egyre pontosabb közelítést kapunk.

Ha elfogadjuk z10 – et, akkor vele d10 számolható:

$$d10=\sqrt{4-\frac{5}{z10^2-1}}=\sqrt{4-\frac{5}{1.735725^2-1}}=1.23118765\,.$$

Na most már csak az a kérdés, hogy az egyiptomiakhoz visszatérjünk, hogy ez a d10 hogyan fejezhető ki törtekkel? Nos úgy, hogy először is lánctört alakba fejtjük, amit úgy kell csinálni, hogy levonjuk az egészrészt és a maradéknak a reciptrokát vesszük, és ezt ismételgetjük. Eszerint

d10 = (1, 4, 3, 13, 1, 5, 40, …) = $1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{13+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{40}}}}}}$ = 1.23118765 = $\frac{54549}{44306}$.