Az e titka

Az e számot így definiálják: $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ = 2.718281828 . . .

Ez a szám irracionális, sőt transzcendens, azaz nem gyöke semmilyen véges fokszámú polinomnak sem. Az e száz jegyre így néz ki:

e=2.7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676 27724076630353547594571382178525166427 . . .

Láthatjuk, hogy nem periódikus, mint azt első látszatra gondoltuk volna.

A Newton – féle kifejtési tétel segítségével fel tudjuk írni az e – t szebb alakban is: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0}\cdot 1+\binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots=$

$$=\frac{1}{0!}\cdot 1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{4!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{n}\right)+\ldots$$

Ha most elvégezzük a $\lim_{n\to\infty}$ határátmenetet, akkor az $\frac{1}{n}$ – es tagok 0 – hoz tartanak, és ez marad:

$$e=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\ldots$$

Ez a végtelen sor elég gyorsan konvergál, mert a faktoriális gyorsan nő.

Na most feltették nekem azt a ravasz kérdést, hogy akkor $(1+\varepsilon)^{\omega}=e$?

Mint tudjuk, az ε az infinitezimálisan kicsi szám, ami így van definiálva:

ε + ε + ε + ε + ε + . . . = 1.

Az ω pedig a végtelen nagy szám, ami így van definiálva:

1 + 1 + 1 + 1 + 1 + . . . = ω .

A két definícióból leolvasható,hogy akkor ε · ω = 1. Tehát ω = $\frac{1}{\varepsilon}$.

Az ε úgy viselkedik, mint a 0, mert n · ε is infinitezimálisan kicsi.

Ezért az ε – t félnullának is nevezhetjük.

Hasonlóan az ω úgy viselkedik, mint a ∞, mert n · ω is infinitezimálisan nagy.

Ezért az ω – t félvégtelennek is nevezhetjük.

Ahhoz, hogy a kérdésre válaszolni tudjunk, az $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ függvényt kell elemezni.

Ezt a függvényt az x = ε helyen kell venni, és választ kapunk a kérdésre!

az $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ függvény pediglen így számolandó ki:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^5}{6}+\frac{x^6}{7}-\ldots}$$

Na most ha ebbe x = 0 –t helyettesítünk, akkor azt kapjuk, hogy $(1+0)^{\frac{1}{0}} = e$!

Ebben az az aranyos, hogy $1^{\infty} = 1$, tehát akkor 1 + 0 > 1 és $\frac{1}{0} > \infty$!

Ahhoz hogy az $(1+\varepsilon)^{\omega}$ – t megkapjuk, x = ε – t kell helyettesíteni.

A függvény kifejtéséhez az exponenciális alakot szorzatra bontjuk:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^5}{6}+\frac{x^6}{7}-\ldots} = e^1 \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{x^2}{3}} \cdot e^{-\frac{x^3}{4}} \cdot e^{\frac{x^4}{5}} \cdot e^{-\frac{x^5}{6}} \cdot e^{\frac{x^6}{7}} \ldots$$

Most már csak az egyes tagokat kell hatványsorba fejteni:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \cdot \left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2 \cdot 2!}-\frac{x^3}{2^3 \cdot 3!}+\ldots\right) \cdot \left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{3^2 \cdot 2!}+\frac{x^6}{3^3 \cdot 3!}+\ldots\right) \cdot$$
$$\cdot \left(1-\frac{x^3}{4}+\frac{x^6}{4^2 \cdot 2!}-\frac{x^9}{4^3 \cdot 3!}+\ldots\right) \cdot \left(1+\frac{x^4}{5}+\frac{x^8}{5^2 \cdot 2!}+\frac{x^{12}}{5^3 \cdot 3!}+\ldots\right) \cdot \left(1-\frac{x^5}{6}+\frac{x^{10}}{6^2 \cdot 2!}-\ldots\right) \cdot \ldots$$

Most már csak az a dolgunk, hogy az azonos kitevőjű tagokat összeszedjük:

$$\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e\cdot\left(1-\frac{1}{2}\cdot x+\left(\frac{1}{2^2\cdot 2!}+\frac{1}{3}\right)\cdot x^2-\left(\frac{1}{2^3\cdot 3!}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\cdot x^3+\ldots\right)$$

Összeadva a megfelelő tagokat, ezt kapjuk:

$$\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e\cdot\left(1-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{11}{24}\cdot x^2-\frac{7}{16}\cdot x^3+\frac{2447}{5760}\cdot x^4-\frac{959}{2304}\cdot x^5+\frac{238043}{580608}\cdot x^6-\ldots\right)$$

Az x^6 együtthatója pl. így alakul:

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{4^2\cdot 2!}+\frac{1}{3^3\cdot 3!}+\frac{1}{2^6\cdot 6!}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{3^2\cdot 2!}+$$

$$+\frac{1}{2^4\cdot 4!}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2^3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{4}+\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\ .$$

Na most már megválaszolhatjuk a kérdést:

$$\left(1+\varepsilon\right)^{\omega}=e\cdot\left(1-\frac{1}{2}\cdot\varepsilon+\frac{11}{24}\cdot\varepsilon^2-\frac{7}{16}\cdot\varepsilon^3+\frac{2447}{5760}\cdot\varepsilon^4-\frac{959}{2304}\cdot\varepsilon^5+\frac{238043}{580608}\cdot\varepsilon^6-\ldots\right)!$$

Láthatjuk, hogy ennek a számnak csak a standard része e, de van nemstandard része is! Nem beszélt hülyeséget Berkeley püspök, amikor azt mondta, hogy az infinitezimálisokat nem lehet elhanyagolni!

Ezzel azonban még nem ért véget a buli!

Mert az $\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}$ függvényt felírhatjuk a Newton – féle kifejtési tétel segítségével is, és akkor egész más képleteket kapunk!

$$\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{1!}+\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}-1\right)\cdot\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{x}-2\right)\cdot\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

Beszorozva az x hatványokkal, ez lesz belőle:

$$\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1\cdot(1-x)}{2!}+\frac{1\cdot(1-x)\cdot(1-2x)}{3!}+\frac{1\cdot(1-x)\cdot(1-2x)\cdot(1-3x)}{4!}+\ldots$$

Most elvégezve a szorzásokat, ezt kapjuk:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1-x}{2!}+\frac{1-(1+2)x+1\cdot 2x^2}{3!}+\frac{1-(1+2+3)x+(1\cdot 2+1\cdot 3+2\cdot 3)x^2-1\cdot 2\cdot 3x^3}{3!}+\dots$$

És most szedjük össze az azonos kitevőjű tagokat!

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots\right)-\left(\frac{1}{2!}+\frac{1+2}{3!}+\frac{1+2+3}{4!}+\dots\right)\cdot x+\left(\frac{1\cdot 2}{3!}+\frac{1\cdot 2+1\cdot 3+2\cdot 3}{4!}+\dots\right)\cdot x^2+\dots$$

Az első zárójelben kétségtelenül e áll. Mi van a többi zárójelben?

$1+2+3+\dots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, és ezt (n+1)! –sal osztom, kapom:

$$\frac{n(n+1)}{2(n+1)!}=\frac{n(n+1)}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot n\cdot (n+1)}=\frac{1}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot (n-1)}=\frac{1}{2\cdot (n-1)!}$$

Na és ezt összegzem n = 1, 2, 3, … ra. Az eredmény: $\dfrac{1}{2}\cdot e$ lesz!

Ez lesz tehát az x együtthatója, persze negatív előjellel.

Az x^2 együtthatóját már egy kicsit nehezebb lesz meghatározni.

Ehhez az 1·2, 1·2 + 1·3 + 2·3, 1·2 + 1·3 + 1·4 + 2·3 + 2·4 + 3·4, . . . sorozatot

kell elemezni. Vegyük észre, hogy ez az alábbi módon alakítható tovább:

1·2, 1·2 + (1 + 2)·3, 1·2 + (1 + 2)·3 + (1 + 2 + 3 + 4)·4, ami így írható:

$$\frac{1\cdot 2}{2}\cdot 2+\frac{2\cdot 3}{2}\cdot 3+\frac{3\cdot 4}{2}\cdot 4+\frac{4\cdot 5}{2}\cdot 5+\dots=\sum\frac{n^2\cdot (n-1)}{2}$$, ha n = 2, 3, 4, …

Ez két tagra bontható: $\frac{1}{2}\sum n^3-\frac{1}{2}\sum n^2$.

Az első tag értéke $\dfrac{n^2\cdot (n+1)^2}{8}$, a másodiké $\dfrac{n\cdot (n+1)\cdot (2n+1)}{12}$

A kettő különbsége :

$$\frac{n\cdot(n+1)}{24}\cdot(3n^2+3n-4n-2)=\frac{n\cdot(n+1)}{24}\cdot(3n^2-3n+2n-2)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n-1)\cdot(3n+2)}{24}$$

Na most ezt kell osztani (n+1)! – sal, és összegezni kell n = 2, 3, 4, … – re.

Az (n+1)! – ból ki tudunk egyszerűsíteni n·(n+1)·(n–1) – gyel, marad

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n+2}{24\cdot(n-2)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n+8}{24\cdot n!}=\frac{1}{8}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}+\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{1}{8}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}+\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{1}{8}\cdot e+\frac{1}{3}\cdot e=\frac{11}{24}\cdot e\ .$$

Láthatjuk, hogy ugyanazokat az együtthatókat kapjuk, mint korábban, csak

jóval bonyolultabb úton. Ez lesz tehát az x^2 együtthatója.

Mielőtt folytatnánk az elemzést, vessünk egy pillantást a sorozatainkra!

Az $\frac{n^2\cdot(n-1)}{2}$ így szerepel a Sloane katalógusban:

(A Sloane katalógus így hívható be: Google, sloane's on-line , első találat)

A006002 n(n+1)^2/2. (Formerly M1920)

0, 2, 9, 24, 50, 90, 147, 224, 324, 450, 605,

Sum of nontriangular numbers between successive triangular numbers.
1, (2), 3, (4, 5), 6, (7, 8, 9), 10, (11, 12, 13, 14), 15, ...
Sum of the terms in brackets.
Or sum of n consecutive integers beginning with T(n) +1. T(n) = n(n+1)/2.
- Amarnath Murthy (amarnath_murthy(AT)yahoo.com), Aug 27 2005

G.f.: x(x+2)/(1-x)^4. - Michael Somos, Jan 30 2004

C(2+n, 1)*C(2+n, 2). - Zerinvary Lajos (zerinvarylajos(AT)yahoo.com), Jan 10 2006

Table[(n^3 -n^2)/2, {n, 1, 41}]
- Zerinvary Lajos (zerinvarylajos(AT)yahoo.com), Mar 21 2007

A $\sum\frac{n^2\cdot(n-1)}{2}$ sorozat így szerepel a Sloane katalógusban:

A000914 Stirling numbers of first kind: s(n+2,n). (Formerly M1998 N0789)

0, 2, 11, 35, 85, 175, 322, 546, 870, 1320, 1925

Sum of product of unordered pairs of numbers from {1..n+1}.

Number of edges of a complete k-partite graph of order k*(k+1)/2

a(n)=binomial(n+2, 3)*(3*n+5)/4 = (n+1)*n*(n+2)*(3*n+5)/24.

E.g.f.: exp(x)*x*(48+84*x+32*x^2+3*x^3)/24.

G.f.: (2*x+x^2)/(1-x)^5.

a(n)=sum(i=1, n, i*(i+1)^2/2)

- Jon Perry (perry(AT)globalnet.co.uk), Jul 31 2003

Az E.g.f. az exponenciális generátorfüggvény, definíciója: $\sum \frac{a_n \cdot x^n}{n!}$.

A G.f. a generátorfüggvény, definíciója: $\sum a_n \cdot x^n$.

Az A000914 definíciójából kiderül, hogy ezek nem mások, mint az elsőfajú Stirling – számok, melyek az x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)…hatványsorának együtthatói, jelük s(n,m). Az 1(1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)… együtthatói ugyanezek, csak fordított sorrendben: s(n, n – m) .

A Stirling – számok az alábbi háromszögből határozhatók meg:

A háromszöget generáló Maple 7 program:

```
a[0,0]:=1:a[1,0]:=1:a[1,1]:=1:for i from 2 to 10 do
a[i,0]:=1:for j from 1 to i-1 do a[i,j]:=i*a[i-1,j-1]+a[i-1,j]
od:a[i,i]:=i*a[i-1,i-1] od:
for i from 0 to 10 do seq(a[i,j],j=0..i) od;
```

1

1, 1

1, 3, 2

1, 6, 11, 6

1, 10, 35, 50, 24

1, 15, 85, 225, 274, 120

1, 21, 175, 735, 1624, 1764, 720

1, 28, 322, 1960, 6769, 13132, 13068, 5040

1, 36, 546, 4536, 22449, 67284, 118124, 109584, 40320

1, 45, 870, 9450, 63273, 269325, 723680, 1172700, 1026576, 362880

1, 55, 1320, 18150, 157773, 902055, 3416930, 8409500, 12753576, 10628640, 3628800

Látható, hogy a[n,0] = 1, a[n,n] = n! , és a[n,k] = n·a[n–1,k–1] + a[n–1,k].

Tehát az elsőfajú Stirling – számokkal van dolgunk.

A háromszögből láthatjuk, hogy a következő végtelen összegeket kell

képeznünk: $1+\frac{a[0,0]}{1!}+\frac{a[1,0]}{2!}+\frac{a[2,0]}{3!}+\frac{a[3,0]}{4!}+\frac{a[4,0]}{5!}+\ldots=e$,

$\frac{a[1,1]}{2!}+\frac{a[2,1]}{3!}+\frac{a[3,1]}{4!}+\frac{a[4,1]}{5!}+\frac{a[5,1]}{6!}+\ldots=\frac{1}{2}e$,

$\frac{a[2,2]}{3!}+\frac{a[3,2]}{4!}+\frac{a[4,2]}{5!}+\frac{a[5,2]}{6!}+\frac{a[6,2]}{7!}+\ldots=\frac{11}{24}e$, stb.

A felösszegzést nagyban megkönnyíti, ha a Stirling – számokat sikerül

binomiális együtthatók segítségével felírni, ugyanis $\sum_{n=k}^{m}\binom{n}{k}=\binom{m+1}{k+1}$,

tehát a binomiális együtthatók könnyedén felösszegezhetők.

Az $\frac{1}{4!}\cdot\binom{6}{6}+\frac{1}{5!}\cdot\binom{7}{6}+\frac{1}{6!}\cdot\binom{8}{6}+\frac{1}{7!}\cdot\binom{9}{6}+\ldots$ típusú szummák is kiszámolhatók:

Ez nem más, mint $\frac{6!}{4!\cdot 0!\cdot 6!}+\frac{7!}{5!\cdot 1!\cdot 6!}+\frac{8!}{6!\cdot 2!\cdot 6!}+\frac{9!}{7!\cdot 3!\cdot 6!}+\frac{10!}{8!\cdot 4!\cdot 6!}+\ldots=$

$\frac{5\cdot 6}{0!\cdot 6!}+\frac{6\cdot 7}{1!\cdot 6!}+\frac{7\cdot 8}{2!\cdot 6!}+\frac{8\cdot 9}{3!\cdot 6!}+\frac{9\cdot 10}{4!\cdot 6!}+\ldots=\frac{1}{6!}\cdot\left(x^6\cdot e^x\right)''$, ahol a vessző

deriválást jelent, és az x = 1 helyen kell venni.

$\left(x^6\cdot e^x\right)''=\left(\left(6x^5+x^6\right)\cdot e^x\right)'=\left(30x^4+12x^5+x^6\right)\cdot e^x$,

és ennek az x = 1 helyen vett értéke 43·e , a teljes szumma tehát $\frac{43}{720}\cdot e$.

Feladatunk tehát a Stirling – számok binomiális együtthatókkal való felírása.

Amikor a $\frac{11}{24}\cdot e$ eredményt kihoztuk, a $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a\left[n,2\right]}{(n+1)!}=\frac{2}{3!}+\frac{11}{4!}+\frac{35}{5!}+\frac{85}{6!}+\frac{175}{7!}+\ldots$

összegzést kellett elvégezni. $a\left[n,2\right]=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n-1)\cdot(3n+2)}{24}$, n = 2, 3, 4, …

Ha áttérünk az n helyett az n + 1 változóra, a sorozatunk képlete ez lesz:

$a\left[n+1,2\right]=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(3n+5)}{24}$, n = 1, 2, 3, 4, …

A Sloane katalógusban mindenesetre így szerepel.

Ezt a képletet meg tudjuk adni binomiális együtthatókkal:

$a\left[n+1,2\right]=3\cdot\binom{n+3}{4}-\binom{n+2}{3}$, n = 1, 2, 3, 4, … = 2, 11, 35, 85, 175, 322, …

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\left[n+1,2\right]}{(n+2)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(n+2)!}\cdot\binom{n+3}{4}-\frac{1}{(n+2)!}\cdot\binom{n+2}{3}.$$

Az első tag: $\frac{3}{4!}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{(n-1)!}=\frac{3}{4!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+4}{n!}=\frac{5}{8}\cdot e$, a második tag: $\frac{1}{3!}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}=\frac{1}{6}\cdot e$.

A kettő különbsége $\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{6}\right)\cdot e=\left(\frac{15-4}{24}\right)\cdot e=\frac{11}{24}\cdot e$.

Korábbi eredményeinkkel összhangban.

A matematikában az a csodálatos, hogy egy eredményhez többféle úton is eljuthatunk, és mégis, minden út ugyanoda vezet!

Most ezt szeretnénk kihozni:

$$\frac{a\left[3,3\right]}{4!}+\frac{a\left[4,3\right]}{5!}+\frac{a\left[5,3\right]}{6!}+\frac{a\left[6,3\right]}{7!}+\frac{a\left[7,3\right]}{8!}+\ldots=\frac{7}{16}e\ !$$

Ehhez az $a\left[n,3\right]=6$, 50, 225, 735, 1960, 4536, 9450, 18150, . . .

sorozatot kell felírni binomiális formában. Ez az alábbi módon tehető meg:

1·2·3, 1·2·3 + (1·2 + 1·3 + 2·3)·4 , 1·2·3 + (1·2 + 1·3 + 2·3)·4 + (1·2 + ...)·5 + ...

A zárójelben éppen $a\left[n+1,2\right]$ áll, melynek képlete már ismert.

Ezt (n + 2) – vel szorozzuk, és így összegezzük. Kapjuk:

$$a\left[n+1,2\right]\cdot(n+2)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+2)\cdot(3n+5)}{24}.$$

Ezt átalakítjuk:

$$a\left[n+1,2\right]\cdot(n+2)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3-1)\cdot(3n+12-7)}{24},$$

ezt pedig szétszedjük tagokra, úgy hogy közben már felismerjük a binomiális képleteket a tagokban:

$$3\cdot5\cdot\binom{n+4}{5}-3\cdot\binom{n+3}{4}-\frac{3}{4}\cdot\binom{n+2}{3}-7\cdot\binom{n+3}{4}+\frac{7}{4}\cdot\binom{n+2}{3}.$$

Összevonva a megfelelő tagokat ezt kapjuk:

$15\cdot\binom{n+4}{5}-10\cdot\binom{n+3}{4}+\binom{n+2}{3}$. Ezt már könnyen felösszegezhetjük:

$$a\left[n+1,3\right]=\sum 15\cdot\binom{n+4}{5}-10\cdot\binom{n+3}{4}+\binom{n+2}{3}=15\cdot\binom{n+5}{6}-10\cdot\binom{n+4}{5}+\binom{n+3}{4}$$

Most már csak ezt kell (n + 3)! – sal osztani és felösszegezni n = 1, 2, 3 … – ra.

Na éppen ilyet csináltunk, nem véletlen vettem éppen ezt a példát!

Az eredményt így kapjuk meg:

$\frac{15}{6!}\cdot\left(x^6\cdot e^x\right)''-\frac{10}{5!}\cdot\left(x^5\cdot e^x\right)'+\frac{1}{4!}\cdot x^4\cdot e^x$, amit az x = 1 helyen kell venni. Ez pedig

$$\frac{15}{6!}\cdot\left(30x^4+6x^5+6x^5+x^6\right)\cdot e^x-\frac{10}{5!}\cdot\left(5x^4+x^5\right)\cdot e^x+\frac{1}{4!}\cdot x^4\cdot e^x.$$

Ennek az x = 1 helyen vett értéke

$$\frac{15}{720}\cdot 43\cdot e-\frac{10}{120}\cdot 6\cdot e+\frac{1}{24}\cdot e=\left(\frac{43}{48}-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}\right)\cdot e=\frac{21}{48}\cdot e=\frac{7}{16}\cdot e$$

Nagyszerű, kijött tehát a várt érték!

Az $a\left[n,4\right]=24$, 274, 1624, 6769, 22449, 63273, 157773, 357423, …

sorozatot az alábbi alakban keressük:

$a\left[n,4\right]=a\cdot\binom{n+4}{8}-b\cdot\binom{n+3}{7}+c\cdot\binom{n+2}{6}-d\cdot\binom{n+1}{5}$, n = 4, 5, 6, …

A sorozat első 4 tagjából egy 4 ismeretlenes egyenletrendszert kapok,

melynek megoldása ez: a = 105, b = 105, c = 25, d = 1.

Érdekelne, hogy mik ezek az együtthatók, és hogy kaphatók meg.

Ezt a felösszegzést már nem végzem el, mert túl bonyolultnak tűnik.

Eddig az $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ függvényt x kis értékeire vizsgáltuk. pl. x = ε .

Most nézzük meg x nagy értékeire is, ahol az x mellett az 1 elhanyagolható!

$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{1+x} \approx \sqrt[x]{x} = e^{\frac{\ln(x)}{x}} = 1+\frac{\ln(x)}{x}+\ldots$ és most csak az elsőfokú

közelítést nézzük. Vegyünk néhány konkrét esetet!

$\sqrt[10]{10} = 1.258925412\ldots, 1+\frac{\ln(10)}{10} = 1.230258509\ldots$, két jegyre pontos.
$\sqrt[100]{100} = 1.047128548\ldots, \frac{\ln(100)}{100} = 1.046051702\ldots$, 3 jegyre pontos.
$\sqrt[1000]{1000} = 1.006931669\ldots, 1+\frac{\ln(1000)}{1000} = 1.006907755279\ldots$, 5 jegyre pontos.
$\sqrt[10000]{10000} = 1.000921458\ldots, 1+\frac{\ln(10000)}{10000} = 1.0009210340372\ldots$, 7 jegyre…
$\sqrt[100000]{100000} = 1.000115136\ldots, 1+\frac{\ln(100000)}{100000} = 1.000115129\ldots$, 8 jegyre…

Láthatjuk, hogy az eredmény egyre jobban közelít a helyes értékhez.

Na most az $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ függvényt felírhatjuk a Newton – féle kifejtési tétellel is,

és akkor ezt kapjuk: $(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1+\frac{1}{x}\cdot x+\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}-1\right)\cdot x^2+\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{x}-2\right)\cdot x^3+\ldots$

Az 1, 2, 3, … mellett az $\frac{1}{x}$ elhanyagolható, marad ez:

$(1+x)^{\frac{1}{x}} \approx 1+\frac{1}{1}-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\ldots = 1+\frac{\ln(1+x)}{x}$. Szépen kijött tehát.

Van azonban egy bökkenő: az $\frac{1}{1}-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\ldots = \frac{\ln(1+x)}{x}$ végtelen sor

az x > 1 értékekre divergens, mi meg éppenhogy nagy x – ekre írtuk fel!

Ez pedig a transzvergens sorok eszméjét igazolja!

Transzvergens sornak az olyan végtelen sort nevezzük, amely klasszikusan divergens, van azonban egy formális matematikai összegképlete.

Ilyen pl. a mértani sor: $y = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... = \frac{1}{1-x}$, mert

$x \cdot y = x + x^2 + x^3 + x^4 + ... = y - 1$, y·(x – 1) = – 1, ennek megoldása a fenti.

A levezetésben sehol nem szerepel az, hogy x mekkora, így érvényes akkor is

amikor x > 1 ! Tehát pl. 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + … = – 1 !

Na ezért hívjuk ezt transzvergens sornak, mert túlhalad a végtelenen és

visszatér a végesbe, mintegy körbekerüli a számegyenest, amely a $+\infty = -\infty$

képlet értelmében körré zárul! Ld. projektív geometria! Vagy: Riemann – gömb!

Végül hadd írjak azokról a Maple 7 programokról, amelyekkel leteszteltem

az eredményeimet. A matekban az a csodálatos, hogy lehet hibázni, de a hibákra

mindig fény derül, lelepleződnek. Ez is azt bizonyítja, hogy a matematika az

Örökkévalóság Tudománya, igazságai örökérvényűek, az ember csak felfedezi

őket, de nem teremti. Illetve: Újrateremti őket az anyagi világban.

Van tehát egy Örök Forrás, ahonnan minden információ lehívható.

```
a[0,0]:=1:a[1,0]:=1:a[1,1]:=1:for i from 2 to 10 do
a[i,0]:=1:for j from 1 to i-1 do a[i,j]:=i*a[i-1,j-1]+a[i-1,j]
od:a[i,i]:=i*a[i-1,i-1] od:
seq(seq(a[i,j],j=0..i),i=0..10);
```

1, 1, 1, 1, 3, 2, 1, 6, 11, 6, 1, 10, 35, 50, 24, 1, 15, 85, 225, 274, 120, 1, 21, 175, 735, 1624, 1764, 720, 1, 28, 322, 1960, 6769, 13132, 13068, 5040, 1, 36, 546, 4536, 22449, 67284, 118124, 109584, 40320, 1, 45, 870, 9450, 63273, 269325, 723680, 1172700, 1026576, 362880, 1, 55, 1320, 18150, 157773, 902055, 3416930, 8409500, 12753576, 10628640, 3628800

```
seq(a[i,1],i=1..10);
```

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55

Ez jó, ezek a háromszögszámok.

```
a[0,0]:=1:a[1,0]:=1:a[1,1]:=1:for i from 2 to 30 do
a[i,0]:=1:for j from 1 to i-1 do a[i,j]:=i*a[i-1,j-1]+a[i-1,j]
od:a[i,i]:=i*a[i-1,i-1] od:
seq(seq(a[i,j],j=0..i),i=0..30);
```

Ez azért kell, hogy az egyes számokat 30 – ig ki tudjam listázni.

```
seq(a[i,1],i=1..30);
```

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210, 231, 253, 276, 300, 325, 351, 378, 406, 435, 465

```
seq(a[i,2],i=2..30);
```

2, 11, 35, 85, 175, 322, 546, 870, 1320, 1925, 2717, 3731, 5005, 6580, 8500, 10812, 13566, 16815, 20615, 25025, 30107, 35926, 42550, 50050, 58500, 67977, 78561, 90335, 103385

```
evalf(sum(a[n,1]/(n+1)!,n=1..29),20);
```

1.3591409142295226177

```
evalf(exp(1)/2,20);
```

1.3591409142295226177

pompás, hát ez talált! Ez az epszilon együtthatója, mínusz.

```
evalf(sum(a[n,2]/(n+1)!,n=2..29),20);
```

1.2458791713770623995

```
evalf(exp(1)*11/24,20);
```

1.2458791713770623995

Gyönyörűűű! Ez az epszilonnégyzet együtthatója.

```
evalf(sum(a[n,3]/(n+1)!,n=3..29),20);
```

1.1892482999508322905

```
evalf(exp(1)*7/16,20);
```

1.1892482999508322905

Ez is stimmel.Ez az epszilonköb együtthatója, mínusz.

```
evalf(sum(a[n,4]/(n+1)!,n=4..29),20);
```

$$1.1547978531665423075$$

```
evalf(exp(1)*2447/5760,20);
```

$$1.1547978531665423075$$

epszilon^4 együtthatója.

```
evalf(sum(a[n,5]/(n+1)!,n=5..29),20);
```

$$1.1314376187032223875$$

```
evalf(exp(1)*959/2304,20);
```

$$1.1314376187032223875$$

Ez is jó. epszilon^5 együtthatója, mínusz.

```
evalf(sum(a[n,6]/(n+1)!,n=6..29),20);
```

$$1.1144661480583741612$$

epszilon^6 együtthatója.

```
1/7+1/16/2!+1/4/8/3!+1/27/3!+1/9/2!/4/2!+1/3/16/4!+1/2/6+
1/2/3/4+1/5/3+1/5/4/2!+1/64/6!;
```

$$\frac{238043}{580608}$$

```
evalf(exp(1)*238043/580608,20);
```

$$1.1144661480583741612$$

Na itt már több tagot lefelejtettem, többször kellett kiszámoltatni mire jó lett!

Tehát (1+x)^(1/x)=e*(1-1/2*x+11/24*x^2-7/16*x^3+2447/5760*x^4-959/2304*x^5+238043/580608*x^6-...)

```
x:=.1:
evalf((1+x)^(1/x),20);
```

$$2.5937424601$$

```
evalf(exp(1)*(1-1/2*x+11/24*x^2-7/16*x^3+2447/5760*x^4-
959/2304*x^5+238043/580608*x^6),20);
```

$$2.5937425603251904457$$

```
evalf(exp(1)*238043/580608*x^6,20);
```

$$.1114466148058374161210^{-5}$$

```
Tehát elég nagy a hibatag. A sor lassan konvergál.
```

De azért látszik, hogy túl nagy hibát nem követtünk el.

```
seq(15*binomial(n+2,6)-
10*binomial(n+1,5)+binomial(n,4),n=4..30);
```

6, 50, 225, 735, 1960, 4536, 9450, 18150, 32670, 55770, 91091, 143325, 218400, 323680, 468180, 662796, 920550, 1256850, 1689765, 2240315, 2932776, 3795000, 4858750, 6160050, 7739550, 9642906, 11921175

```
seq(a[n,3],n=3..30);
```

6, 50, 225, 735, 1960, 4536, 9450, 18150, 32670, 55770, 91091, 143325, 218400, 323680, 468180, 662796, 920550, 1256850, 1689765, 2240315, 2932776, 3795000, 4858750, 6160050, 7739550, 9642906, 11921175, 14631225

Itt a binomiális képletemet teszteltem le.

Az a[n,4] sorozatra való tippem:

```
seq(105*binomial(n+6,8)-
105*binomial(n+5,7)+25*binomial(n+4,6)-
binomial(n+3,5),n=2..10);
```

24, 274, 1624, 6769, 22449, 63273, 157773, 357423, 749463

```
Tökéletes!!!
```

Először azt hittem, hogy a 105, 105, 25, 1 együtthatók helyett valami

binomiális együtthatók szerepelnek. De a tippjeim nem váltak be.

Aztán rájöttem, hogy egy egyenletrendszert kell megoldanom:

a[4,n] = 24, 274, 1624, 6769 miatt az egyenletrendszer az alábbi:

$a - b + c - d = 24$

$9a - 8b + 7c - 6d = 274$

$45a - 36b + 28c - 21d = 1624$

$165a - 120b + 84c - 56d = 6769$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása az $a = 105$, $b = 105$, $c = 25$, $d = 1$.

Elemezzük most az ln(1 – x) függvényt!

$$\ln(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-...$$

Akkor $\ln(1-\frac{1}{2})=\ln(\frac{1}{2})=-\ln(2)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2\cdot 2}-\frac{1}{2^3\cdot 3}-\frac{1}{2^4\cdot 4}-\frac{1}{2^5\cdot 5}-...$

Ez mindenesetre gyorsabban konvergál, mint az

$$\ln(2)=\ln(1+1)=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-...$$

```
evalf(log(2),20);
```

.69314718055994530942

```
x:=sum(1/2^n/n,n=1..100);

evalf(x,20);
```

.69314718055994530942

```
x:=sum((-1)^(n+1)/n,n=1..100);

evalf(x,20);
```

.68817217931019520324

Láthatjuk, hogy az első verzió tökéletesen pontos 20 jegyre, míg a második

csak egy jegyre jó! Ilyen ravasz trükkökkel lehet egy számot jól közelíteni!

$$\ln(3)=\ln(1+2)=\frac{2}{1}-\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}-\frac{2^4}{4}+\frac{2^5}{5}-\frac{2^6}{6}+...$$

Hát ez divergens. Az ilyen sorozatot neveztem én transzvergensnek.

Meg lehet határozni ln(3) – at másképpen is? Igen!

$$\ln(1+\frac{1}{2})=\ln(\frac{3}{2})=\ln(3)-\ln(2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2\cdot 2}+\frac{1}{2^3\cdot 3}-\frac{1}{2^4\cdot 4}+\frac{1}{2^5\cdot 5}-...$$

Adjuk ehhez a fentebb kiszámolt ln(2) – t, ezt kapjuk:

$$\ln(3)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2\cdot 3}+\frac{1}{2^4\cdot 5}+\frac{1}{2^6\cdot 7}+\frac{1}{2^8\cdot 9}+\ldots$$

Na ezt már ki lehet számolni!

```
evalf(log(3),20);
```

1.0986122886681096914

```
x:=sum(1/2^(2*n)/(2*n+1),n=0..30):
evalf(x,20);
```

1.0986122886681096914

Látjuk, elég 30 tagra kiszámolni és már 20 jegyre pontos eredményt kapunk.

Kiszámoltuk ln(1 + 2) – t, ami transzvergens sort adott.

Számoljuk ki most ln(1 – 2) – t, ami szintén transzvergens sor lesz!

$1-2=-1=e^{i\pi}$ miatt

$$\ln(1-2)=\ln(-1)=\ln(e^{i\pi})=i\pi=-\frac{2}{1}-\frac{2^2}{2}-\frac{2^3}{3}-\frac{2^4}{4}-\frac{2^5}{5}-\frac{2^6}{6}-\ldots$$

Na ez aranyos, képzetes számot kapunk valós szummából!

Ráadásul még a π is benne van!

Vonjuk ezt le az ln(3) transzvergens sorából! Kapjuk:

$$\ln(3)-i\pi=2\cdot\left(\frac{2}{1}+\frac{2^3}{3}+\frac{2^5}{5}+\frac{2^7}{7}+\frac{2^9}{9}+\frac{2^{11}}{11}+\ldots\right) .$$

Így kapunk csupa pozitív racionális számból komplex számot!

Na ezzel véget ér az e titkáról szóló fejtegetésünk. Még nagyon sok ilyen titkot lehet elemezgetni. Pl. azt, hogy kapjuk meg a Stirling számokat az $f_0(x)=e^x$, $f_n(x)=(x\cdot f_{n-1}(x))'$ függvénysorozatból. De erről már írtam.