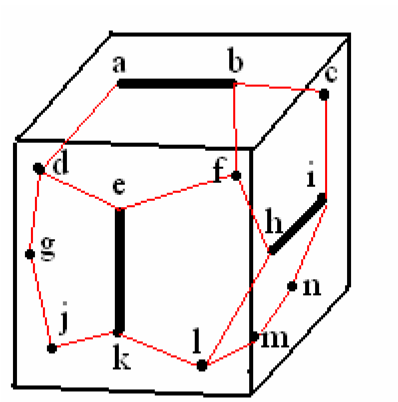
A Dodekaéder forgáscsoportjának mátrixreprezentációja

Ahhoz, hogy a Pentagondodekaéder forgáscsoportjának mátrixreprezentációját fel tudjuk írni, először is el kell helyeznünk a Dodekaédert a Descartes – féle koordinátarendszerben. Ennek legjobb módja az, ha a Dodekaédert úgy helyezzük el, hogy hat éle egy kocka hat lapjára essen, és az élek a koordináta – tengelyekkel párhuzamosan helyezkedjenek el. Ezt mutatja az 1. ábra.



1. ábra.

A következő feladat a csúcsok koordinátáinak meghatározása.

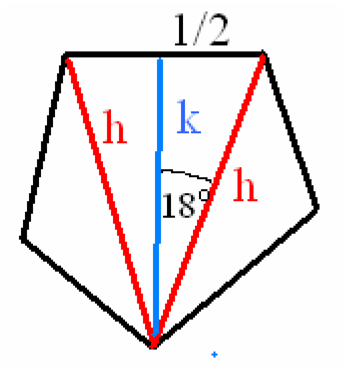
Ehhez válasszuk a Dodekaéder élhosszát 1 – nek, azaz pl. az ab távolság = 1.

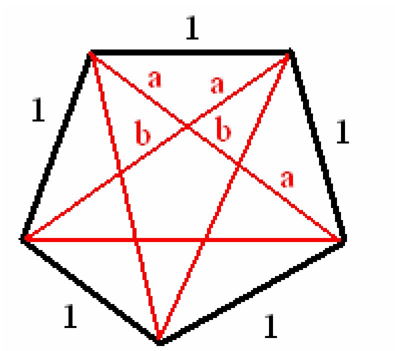
A koordinátatengelyek legyenek a következők:

Az x tengely az ih szakasz felező merőlegese, amely a kockalapra is merőleges.
A –y tengely az ek szakasz felező merőlegese, amely a kockalapra is merőleges.
A z tengely az ab szakasz felező merőlegese, amely a kockalapra is merőleges.

Kérdés, mekkora a kocka élhossza?

Ennek meghatározásához kell a 2. ábra és a 3. ábra.





2. ábra.

3. ábra.

Láthatjuk, hogy a + b + a = h, és a + b = 1, tehát h = 1 + a.

Hasonló háromszögekből adódóan a : b = (1 + a) : 1 = 1 + a = h,

b = 1 – a miatt a : (1 – a) = 1 + a, átszorozva (1 – a) – val :

$a = (1 + a)(1 – a) = 1 – a^2$, azaz $a^2 + a – 1 = 0$, ennek megoldása $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$h = 1 + a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Ez éppen az aranymetszés száma. Értéke h = 1.618033989…

A továbbiakban a h betűvel mindig ezt a számot jelöljük (kivéve amikor a h csúcsot emlegetjük).

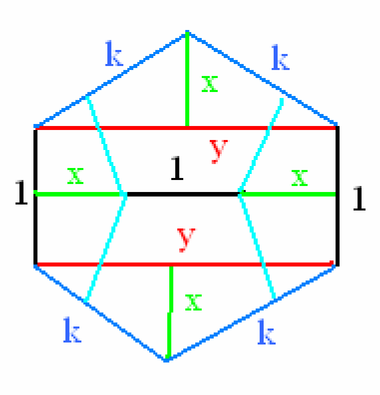
A h szám tulajdonságai a következők:

$h^2 = 1 + h$, $h^3 = 1 + 2h$, $h^4 = 2 + 3h$, $1/h = h – 1$, $1/h^2 = 2 – h$.

A k távolság meghatározása:

$k^2 + 1/4 = h^2 = 1 + h$, $k^2 = 3/4 + h$, $k = \sqrt{\frac{3}{4}+h}$.

Ha a Dodekaédert egy éle felől nézzük, ezt látjuk: (4. ábra)



4. ábra.

y = 1 + 2x lesz a Dodekaédert befoglaló kocka élhossza.

$(y/2)^2 + x^2 = k^2$, azaz $(1/2 + x)^2 + x^2 = 3/4 + h$, azaz

$1/4 + 2x^2 + x = 3/4 + h$, tehát $2x^2 + x – h – 1/2 = 0$, ennek megoldása

$$x = \frac{\sqrt{1+8(h+\frac{1}{2})}-1}{4} = \frac{\sqrt{8h+5}-1}{4} = \frac{1+2h-1}{4} = \frac{h}{2}\ ,$$

mert $8h + 5 = (1 + 2h)^2 = 1 + 4h^2 + 4h = 1 + 4 + 4h + 4h$,

felhasználtuk, hogy $h^2 = 1 + h$.

$y = 1 + 2x = 1 + h$ tehát a kocka élhossza.

Ennek birtokában meg tudjuk adni a kockalapokra eső csúcsok koordinátáit.

$a = (-1/2, 0, (1 + h)/2)$
$b = (1/2, 0, (1 + h)/2)$
$e = (0, -(1 + h)/2, 1/2)$
$k = (0, -(1 + h)/2, -1/2)$
$h = ((1 + h)/2, -1/2, 0)$
$i = ((1 + h)/2, 1/2, 0)$

A nem látható oldalakon levő csúcsok koordinátája hasonló.

A kockacsúcsok irányában levő csúcsok a $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ egységvektorok irányába esnek, hosszuk pedig annyi, amennyi a kockalapokon levő csúcsok távolsága az origótól, minden csúcs ugyanolyan messze van az origótól.

Ez a távolság z, és $z^2 = (y/2)^2 + 1/4$, azaz $z^2 = (1 + h)^2/4 + 1/4 = (2 + 3h +1)/4$

azaz $z^2 = 3/4\ (1 + h)$, tehát $z = \frac{\sqrt{3}}{2}h$, ezzel szorozzuk a $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ egységvektorokat. Kapjuk: $\left(\pm\frac{h}{2},\pm\frac{h}{2},\pm\frac{h}{2}\right)$, azaz pl.

$f = \left(\frac{h}{2},-\frac{h}{2},\frac{h}{2},\right)$

$c = \left(\frac{h}{2},\frac{h}{2},\frac{h}{2},\right)$

$d = \left(-\frac{h}{2},-\frac{h}{2},\frac{h}{2},\right)$

$l = \left(\frac{h}{2}, -\frac{h}{2}, -\frac{h}{2},\right)$

$n = \left(\frac{h}{2}, \frac{h}{2}, -\frac{h}{2},\right).$

A csúcsok birtokában most már meg tudjuk határozni a forgató mátrixokat.

Azt kell csupán kifejezni, hogy az adott forgató mátrix melyik csúcsot hova viszi. Ezzel egy lineáris egyenletrendszert kapunk, amit meg tudunk oldani.

Van még egyszerűbb út is azonban.

Ehhez azt kell tudni, hogy a forgató mátrix első oszlopa azt a vektort adja meg, amibe a mátrix az x irányú egységvektort viszi. A mátrix második oszlopa azt a vektort adja meg, amibe a mátrix az y irányú egységvektort viszi. Végül a mátrix harmadik oszlopa azt a vektort adja meg, amibe a mátrix a z irányú egységvektort viszi. Ha tehát ismerjük e vektorokat, akkor oszloponként tudjuk összerakni a mátrixunkat!

Bizonyítás:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}.$$

Egyszerűen adhatók meg az x, az y és a z tengely körüli 180^o – os forgatások.

Az x tengely körül forgató X mátrix az x tengelyt helyben hagyja, az y –t – y –ra, a z –t pedig – z –re cseréli, ennek mátrixa tehát

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hasonlóan

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ és}$$

$$Z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$X^2 = Y^2 = Z^2$ = Egységmátrix.

A kockacsúcsok körüli 120^o – os forgatások mátrixai is egyszerűen adhatók meg. A c csúcs körül forgató C mátrix például az x tengelyt az y tengelybe, az y tengelyt a z tengelybe és a z tengelyt az x tengelybe viszi, mátrixa tehát

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

C^2 ugyane csúcs körül forgat csak visszafelé:

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

És természetesen C^3 = Egységmátrix.

Hasonlóan adható meg az f csúcs körül forgató F mátrix is:

F az x tengelyt a z tengelybe, az y tengelyt a –x tengelybe és a z tengelyt a –y tengelybe viszi, mátrixa tehát:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

F^2 ugyane csúcs körül forgat csak visszafelé:

$$F^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

És természetesen F^3 = Egységmátrix.

A d, j, l, n csúcsok körüli forgatás hasonlóan adható meg.

Ezzel azonban véget is ért az egyszerűen megadható forgatások sora.

Az a, b csúcsok körüli háromfogású, az ab él körüli kétfogású vagy az abfed lap körüli ötfogású forgatás mátrixának megadása már komolyabb számításokat igényel. Ehhez mindenekelőtt azt kell kiszámolni, hogy az egyes élek felezőpontja hova esik. Mivelhogy az x, y és z tengely is felezőpontra, a hi, az ek és az ab élek felezőpontjára esik. (pontosabban az ek felezőpont a –y –nak felel meg). Az ab él felezőpontja nem más, mint az a és a b csúcs koordinátáinak számtani közepe, azaz $\frac{a+b}{2}=\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2},\frac{a_3+b_3}{2}\right)$, ahol $a=(a_1,a_2,a_3)$ az a csúcs koordinátái és $b=(b_1,b_2,b_3)$ a b csúcs koordinátái. Hasonlóan kapjuk meg bármely más él felezőpontját is. A felezőpont ismeretében meghatározhatjuk a felezőpont irányába mutató egységvektort is, ami azért kell, mert az x, y, z irányba mutató egységvektort a forgatómátrix szintén egységvektorba fogja vinni. Az egységvektor kiszámításához meg kell határozni az élközéppontok távolságát az origótól, ez minden csúcsra ugyanannyi lesz, és már kiszámoltuk, ez az u = $\frac{1}{2}+x=\frac{1+h}{2}$ távolság, ami nem más, mint a befoglaló kocka élhosszának fele.

Az egységvektor kiszámítása tehát ez:

$$\frac{a+b}{2u}=\left(\frac{a_1+b_1}{2u},\frac{a_2+b_2}{2u},\frac{a_3+b_3}{2u}\right)=\left(\frac{a_1+b_1}{1+h},\frac{a_2+b_2}{1+h},\frac{a_3+b_3}{1+h}\right)$$

Ellenőrzésképpen az ab szakaszfelező irányába mutató egységvektor éppen a z irányú egységvektor kell legyen, azaz a (0, 0, 1) egységvektor:

$a=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1+h}{2}\right)$ és $b=\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1+h}{2}\right)$, tehát

$\frac{a+b}{2u}=\frac{1}{1+h}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2},0+0,\frac{1+h}{2}+\frac{1+h}{2}\right)=(0,0,1)$ valóban.

Határozzuk meg az ef él irányába mutató egységvektort!

$e=\left(0,-\frac{1+h}{2},\frac{1}{2}\right)$, f = $\left(\frac{h}{2},-\frac{h}{2},\frac{h}{2},\right)$, tehát

$$\frac{e+f}{2u}=\frac{1}{1+h}\cdot\left(0+\frac{h}{2},-\frac{1+h}{2}-\frac{h}{2},\frac{1}{2}+\frac{h}{2}\right)=\frac{1}{1+h}\cdot\left(\frac{h}{2},-\frac{1+2h}{2},\frac{1+h}{2}\right)=\left(\frac{1}{2h},-\frac{h}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Közben ugye nem felejtettük el a h algebrai tulajdonságait?

$h^2 = 1 + h$, $h^3 = 1 + 2h$, $h^4 = 2 + 3h$, $1/h = h - 1$, $1/h^2 = 2 - h$.

A kapott vektor hossza természetesen 1 kell legyen, azaz

$$\left(\frac{1}{2h}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2-h+1+h+1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \ .$$

Most már nekivághatunk a nagy kalandnak, kiszámolhatjuk a csúcsok, élek és lapok körül forgató mátrixokat!

Határozzuk meg például a b csúcs körül az óramutatóval ellentétes irányba forgató mátrixot! Legyen ez a B mátrix!

A B az ab élet a bf élbe viszi, az fe élet az fh élbe, és az fh élet az ab élbe viszi. Node azt nézzük meg, hogy hova viszi az x, y, z irányú egységvektort! ezzel megkapjuk a mátrixunk első, második és harmadik oszlopát!

A most következő számításokhoz már nem kevés térlátási képesség kell, nem árt, ha van egy papírból készült Dodekaéder modellünk, amit kedvünkre forgathatunk ide – oda! Jó ha a csúcsait megjelöljük a megfelelő betűkkel!

Az x tengelyt, azaz a hi élet az 1. ábrán már nem látható $\left(-\frac{h}{2},\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right)\left(0,\frac{1+h}{2},\frac{1}{2}\right)$ élbe viszi, az ennek irányába mutató egységvektor $\left(-\frac{1}{2h},\frac{h}{2},\frac{1}{2}\right)$, ez tehát a B mátrix első oszlopa.

Az y tengelyt a $\left(-\frac{h}{2},-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right)\left(-\frac{1+h}{2},-\frac{1}{2},0\right)$ élbe viszi, melynek egységvektora $\left(-\frac{h}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2h}\right)$, ez lesz a B mátrix második oszlopa.

A z tengelyt (az ab él felezőpontját) az fb él felezőpontjába viszi, azaz a

$\left(\frac{h}{2},-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right)\left(\frac{1}{2},0,\frac{1+h}{2}\right)$élbe, amelynek egységvektora $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2h},\frac{h}{2}\right)$.

Ez lesz tehát a B mátrix harmadik oszlopa. Ezzel a B mátrix így néz ki:

$$B=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2h} & -\frac{h}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{h}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2h} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2h} & \frac{h}{2} \end{pmatrix}$$

. Ez tehát egy harmadrendű mátrix kell hogy legyen.

Valóban, számoljuk ki B^2 – et!

$$B^2=\begin{pmatrix} \frac{1}{4h^2}-\frac{h^2}{4}+\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{h}{4}+\frac{1}{4h} & -\frac{1}{4h}+\frac{1}{4}+\frac{h}{4} \\ -\frac{1}{4}-\frac{h}{4}-\frac{1}{4h} & -\frac{h^2}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4h^2} & \frac{h}{4}+\frac{1}{4h}-\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4h}+\frac{1}{4}+\frac{h}{4} & -\frac{h}{4}-\frac{1}{4h}+\frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\frac{1}{4h^2}+\frac{h^2}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2h} & \frac{h}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{h}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2h} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2h} & \frac{h}{2} \end{pmatrix}.$$

Látjuk, hogy B^2 éppen a B transzponáltja.

Ennek így is kell lennie, B ugyanis ortogonális mátrix, amelynek az inverze éppen a transzponáltja lesz. B egységvektort egységvektorba visz. A forgatás ugyanis nem változtatja meg a vektorok hosszát, csak az irányát.
Kiszámolhatjuk, hogy $B \cdot B^2$ éppen az egységmátrix lesz.
Gyakorlásképpen végezzük is el önállóan ezt a számítást!

B a b csúcsot helyben kell hogy hagyja. Valóban,

$$B\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1+h}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2h} & -\frac{h}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{h}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2h} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2h} & \frac{h}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1+h}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4h}+\frac{1+h}{4} \\ \frac{h}{4}-\frac{h}{4} \\ \frac{1}{4}+\frac{1+2h}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1+h}{2} \end{pmatrix}.$$

Gyakorlásképpen számoljuk ki, hogy a B az a csúcsot az f csúcsba, az f csúcsot a c csúcsba és a c csúcsot az a csúcsba viszi!

Na most a B mátrix birtokában, az X, Y, Z, C, F, stb forgatások segítségével a Dodekaéder 60 elemű forgáscsoportját, az A_5 alternáló csoportot teljes egészében generálni tudjuk. Két forgatás egymásutánja is forgatás, ezért alkotnak a forgatások csoportot. Tehát az X, Y, Z, C, F, és B mátrixok szorozgatásával megkaphatjuk mind a 60 csoportelemet:

A Dodekaédernek 12 lapja, 20 csúcsa és 30 éle van, ennek megfelelően $12 \cdot 4/2 = 24$ ötfogású forgás, $20 \cdot 2/2 = 20$ háromfogású forgás és $30/2 = 15$ kétfogású forgás van. És természetesen a helybenhagyásnak megfelelő egységmátrix a 60-adik elem. Így $24 + 20 + 15 + 1 = 60$ valóban.

Létezik egy jóval komplikáltabb út is egy ötfogású mátrixelem meghatározásához. Ezt most azért prezentálom, hogy megmutassam, milyen csodálatos dolog a matematika, ahogy a kezdeti káoszból kialakul a rend!

Buktassuk a Dodekaédert az x tengely körül magunk felé úgy, hogy egy lapja éppen az xy síkkal párhuzamos legyen! ezután az xy síkban hajtsunk végre egy 72^o – os forgatást az óramutatóval ellentétes irányban, majd az x tengely körül buktassuk vissza ugyanazzal a szöggel! e 3 művelet eredményeképpen egy ötfogású forgatás jön létre.

Milyen szöggel kell a Dodekaédert buktatni? erre felel a 4. ábra. Ott egy olyan derékszögű háromszöget láthatunk, amelynek az átfogója k, a vízszintes befogója y/2, a függőleges befogója pedig x hosszúságú. A buktatást tehát olyan α szöggel kell végrehajtani, melyre $\sin\alpha = \frac{x}{k}$, $\cos\alpha = \frac{y}{2k}$. Mivel $x = \frac{h}{2}$,

$y = 1 + h$, és $k = \sqrt{\frac{3}{4} + h}$, $\sin\alpha = \frac{h}{2k}$, $\cos\alpha = \frac{1+h}{2k}$,

számszerűen $\sin\alpha = 0.525731112$, $\alpha = 31.7174744^o$.

A forgató mátrixunk így néz ki:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+h}{2k} & -\frac{h}{2k} \\ 0 & \frac{h}{2k} & \frac{1+h}{2k} \end{pmatrix}.$$

A k nem fejezhető ki h – val racionálisan. Na itt jön be a káosz!

A 72^o – os forgatáshoz $\sin 72^o$ és $\cos 72^o$ kell, ezeket a 2. ábrából lehet meghatározni, tudniillik $\sin 72^o = \cos 18^o = \frac{k}{h}$, $\cos 72^o = \sin 18^o = \frac{1}{2h}$.

$$\cos 18^o = \frac{k}{h} = \frac{\sqrt{h + \frac{3}{4}}}{h} = \sqrt{\frac{h + \frac{3}{4}}{h^2}} = \sqrt{\left(h + \frac{3}{4}\right)(2-h)} = \sqrt{2h + \frac{3}{2} - 1 - h - \frac{3}{4}h} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}h} =$$

$= \cos 18^{o} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$, na ez az az alak amire emlékeztem.

Látjuk, hogy kétszeres gyökvonás van benne, ezen nem lehet segíteni.

Már csak abban a csodában reménykedhetünk, hogy ezek az irracionális kifejezések a végén valahogy eltűnnek.

A 72^{o} – os forgató mátrixunk így fog kinézni:

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2h} & -\frac{k}{h} & 0 \\ \frac{k}{h} & \frac{1}{2h} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A buktatás, a 72^{o} – os forgatás és a visszabuktatás így fog kinézni:

$U^{-1}\,V\,U$, amely természetesen fordított sorrendben értendő, azaz

először U –val forgatunk, majd V – vel, végül U^{-1} – gyel.

A mátrixszorzás asszociatív, tehát tetszőleges sorrendben szorozhatunk.

Szorozzuk össze először az első kettőt, majd az eredménnyel szorozzuk a harmadikat! Kapjuk:

$$U^{-1}V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2h} & -\frac{k}{h} & 0 \\ \frac{h}{2} & \frac{h}{4k} & \frac{h}{2k} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4k} & \frac{1+h}{2k} \end{pmatrix}, \quad U^{-1}VU = \begin{pmatrix} \frac{1}{2h} & -\frac{h}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{h}{2} & \frac{h^3}{8k^2}+\frac{h^2}{4k^2} & -\frac{h^2}{8k^2}+\frac{h^3}{4k^2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{h^2}{8k^2}+\frac{h^3}{4k^2} & \frac{h}{8k^2}+\frac{h^4}{4k^2} \end{pmatrix}.$$

A nevezőkben mindenütt k^2 szerepel, ami már racionális kifejezés!

$k^2 = h + \frac{3}{4}$, mi ennek a reciptroka? Mondjuk a + bh. Szorozzuk meg vele:

$(h + \frac{3}{4})\cdot(a + bh) = 1$ kell legyen.

$ah + \frac{3}{4}a + b + bh + \frac{3}{4}bh = 1.$

$a + b + \frac{3}{4}b = 0$, $a = -\frac{7}{4}b$.

$\frac{3}{4}a + b = 1$, $\quad \frac{3}{4}(-\frac{7}{4})b + b = 1$, $\quad (1-\frac{21}{16})b = 1$, $\quad b = -\frac{16}{5}$.

$\frac{3}{4}a = 1+\frac{16}{5} = \frac{21}{5}$, $a = \frac{28}{5}$.

Tehát $\frac{1}{8k^2} = \frac{7}{10} - \frac{4}{10}h$, ezt kell betenni a mátrixunkba:

$$U^{-1}VU = \begin{pmatrix} \frac{1}{2h} & -\frac{h}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{h}{2} & (1+2h+2+2h)\left(\frac{7}{10}-\frac{4}{10}h\right) & (-1-h+2+4h)\left(\frac{7}{10}-\frac{4}{10}h\right) \\ -\frac{1}{2} & (-1-h+2+4h)\left(\frac{7}{10}-\frac{4}{10}h\right) & (h+4+6h)\left(\frac{7}{10}-\frac{4}{10}h\right) \end{pmatrix}.$$

Végezzük el a kijelölt szorzásokat!

$$(1+2h+2+2h)\left(\frac{7}{10}-\frac{4}{10}h\right) = (3+4h)\left(\frac{7}{10}-\frac{4}{10}h\right) =$$

$$= \frac{21}{10} - \frac{12}{10}h + \frac{28}{10}h - \frac{16}{10} - \frac{16}{10}h = \frac{5}{10} = \frac{1}{2},$$

$$(-1-h+2+4h)\left(\frac{7}{10}-\frac{4}{10}h\right) = (1+3h)\left(\frac{7}{10}-\frac{4}{10}h\right) =$$

$$= \frac{7}{10} - \frac{4}{10}h + \frac{21}{10}h - \frac{12}{10} - \frac{12}{10}h = -\frac{5}{10} + \frac{5}{10}h = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}h = \frac{1}{2h},$$

$$(h+4+6h)\left(\frac{7}{10}-\frac{4}{10}h\right) = (4+7h)\left(\frac{7}{10}-\frac{4}{10}h\right) =$$

$$=\frac{28}{10}+\frac{49}{10}h-\frac{16}{10}h-\frac{28}{10}-\frac{28}{10}h=\frac{5}{10}h=\frac{1}{2}h=\frac{h}{2}.$$

Ezzel a mátrixunk így alakul tehát:

$$U^{-1}VU=\begin{pmatrix} \frac{1}{2h} & -\frac{h}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{h}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2h} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2h} & \frac{h}{2} \end{pmatrix}.$$

Nevezzük ezt a mátrixot P – nek! Ez tehát egy ötödrendű forgatás.

Ellenőrzésképpen számítsuk ki a mátrix determinánsát!

Ennek egynek kell lennie.

$$\text{Det P} = \frac{1}{2h}\left(\frac{h}{4}-\frac{1}{4h^2}\right)+\frac{h}{2}\left(\frac{h^2}{4}+\frac{1}{4h}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\big((h-1)(h-2+h)+h(1+h+h-1)+2\big)=\frac{1}{8}(2+2h-2h-2h+2+2+2h+2)=\frac{8}{8}=1$$

Számoljuk ki P hatványait! Az eredmény:

$$P^2=\begin{pmatrix} -\frac{h}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2h} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2h} & \frac{h}{2} \\ -\frac{1}{2h} & \frac{h}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ P^3=\begin{pmatrix} -\frac{h}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2h} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2h} & \frac{h}{2} \\ \frac{1}{2h} & \frac{h}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ P^4=\begin{pmatrix} \frac{1}{2h} & \frac{h}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{h}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2h} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2h} & \frac{h}{2} \end{pmatrix},$$

Látjuk, hogy P^4 éppen P transzponáltja, tehát inverze, és nem is csalódunk,

P^4 éppen az egységmátrix lesz. Ezzel igazoltuk, hogy P ötödrendű.

P az a csúcsot a b csúcsba, a b csúcsot a c csúcsba viszi, és az e csúcsot a h csúcsba viszi. ezzel 3 egyenletrendszert kapok, melyből P meghatározható!

Nézzük pl. a P·a = b csúcstranszformációt!

$$P\cdot a=\begin{pmatrix} \frac{1}{2h} & -\frac{h}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{h}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2h} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2h} & \frac{h}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1+h}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4h}+\frac{1+h}{4} \\ -\frac{h}{4}+\frac{h}{4} \\ \frac{1}{4}+\frac{1+2h}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1+h}{2} \end{pmatrix}=b:$$

$$P\cdot b=\begin{pmatrix} \frac{1}{2h} & -\frac{h}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{h}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2h} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2h} & \frac{h}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1+h}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4h}+\frac{1+h}{4} \\ \frac{h}{4}+\frac{h}{4} \\ -\frac{1}{4}+\frac{1+2h}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} \end{pmatrix}=c$$

Ebből a következő egyenletrendszer lesz:

$$-\frac{1}{2}\cdot p_{11}+\frac{1+h}{2}\cdot p_{13}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}\cdot p_{11}+\frac{1+h}{2}\cdot p_{13}=\frac{h}{2}.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $p_{11}=\frac{1}{2h}$, $p_{13}=\frac{1}{2}$, és tényleg annyi!

Hasonlóképpen lehet a többi mátrixelemet kiszámolni.

A P forgatás az ötszög középpontját fixen hagyja.

Az ötszög középpontját pedig úgy kapom meg, hogy a z irányú egységvektort

$-\alpha$ szöggel buktatom az x tengely körül. Így az ötszög tengelyét a

$p=\left(0,\frac{h}{2k},\frac{1+h}{2k}\right)$ egységvektor határozza meg. Tehát P·p = p kell legyen.

$$P\cdot p=\left(-\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2k}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1+h}{2k},\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{2k}+\frac{1}{2h}\cdot\frac{1+h}{2k},\frac{1}{2h}\cdot\frac{h}{2k}+\frac{h}{2}\cdot\frac{1+h}{2k}\right)=\left(0,\frac{h}{2k},\frac{1+h}{2k}\right)$$

Valóban a p vektort kaptuk tehát.

Határozzuk meg azt a forgatást, amely az a – b – f – e – d – a csúcsokat viszi egymásba! Jó, ha kéznél van egy jó papírmodell.

Nevezzük ezt a mátrixot Q – nak! Tehát Q·a = b, Q·b = f, Q·f = e, stb.

Q a hi élet a kl élbe viszi, tehát az x tengelyt az

$$\frac{1}{1+h}\cdot\left(\frac{h}{2},-\frac{h}{2},-\frac{h}{2}\right)+\frac{1}{1+h}\cdot\left(0,-\frac{1+h}{2},-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2h},-\frac{h}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

vektorba viszi, ez lesz tehát Q első oszlopa.

Q az ek élet a dg élbe viszi, tehát a –y tengelyt az

$$\frac{1}{1+h}\cdot\left(-\frac{h}{2},-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right)+\frac{1}{1+h}\cdot\left(-\frac{1+h}{2},-\frac{1}{2},0\right)=\left(-\frac{h}{2},-\frac{1}{2},0\right)$$

vektorba viszi, tehát ennek – 1 – szerese lesz Q második oszlopa.

Q az ab élet a bf élbe viszi, tehát a z tengelyt az

$$\frac{1}{1+h}\cdot\left(\frac{h}{2},-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right)+\frac{1}{1+h}\cdot\left(\frac{1}{2},0,\frac{1+h}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2h},\frac{h}{2}\right)$$

vektorba viszi, ez lesz tehát Q harmadik oszlopa. Kaptuk tehát:

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{2h} & \frac{h}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{h}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2h}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2h} & \frac{h}{2}\end{pmatrix}.$$

Meglévő mátrixaink szorozgatásával pedig a Dodekaéder forgáscsoportjának mind a 60 elemét megkaphatjuk. Szorgalmi feladat: számoljunk ki minél többet! Próbáljuk meg feltérképezni a 60 elemű csoportot!