A Forgó Fekete Lyuk Kerr – Béta Metrikája

A forgó fekete lyuk metrikáját Roy Kerr adta meg 1963-ban, amit Boyer és Lindquist hozott a ma ismert alakra 1967-ben. Ez a metrika a következő:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g \cdot r}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{r_g \cdot r \cdot a^2}{\rho^2} \cdot s^2\right)s^2 d\varphi^2 + \frac{2 \cdot r_g \cdot r \cdot a}{\rho^2} s^2 d\varphi dt$$

Itt bevezettük a következő jelöléseket:

$$s = \sin(\theta)\,,\quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cdot \cos^2(\theta)\,,\ \Delta = r^2 - r_g \cdot r + a^2\,,\ r_g = \frac{2GM}{c^2}\,,$$

M = a forgó fekete lyuk tömege, $a = \dfrac{J}{M \cdot c}$, J = a forgó fekete lyuk impulzusmomentuma.

A Kerr – metrika a c = 1 egységrendszerben van felírva.

A metrika a Boyer – Lindquist koordinátákban, más néven a belapult szferoidális koordinátákban van megadva, amelyet az M = 0 választással kapunk meg:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{\rho^2}{r^2 + a^2}dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - (r^2 + a^2)\sin^2(\theta)d\varphi^2\ .$$

Ez egy görbületlen Galilei – metrika.

A dr^2, a $d\theta^2$ és a $d\varphi^2$ együtthatóit jelöljük így:

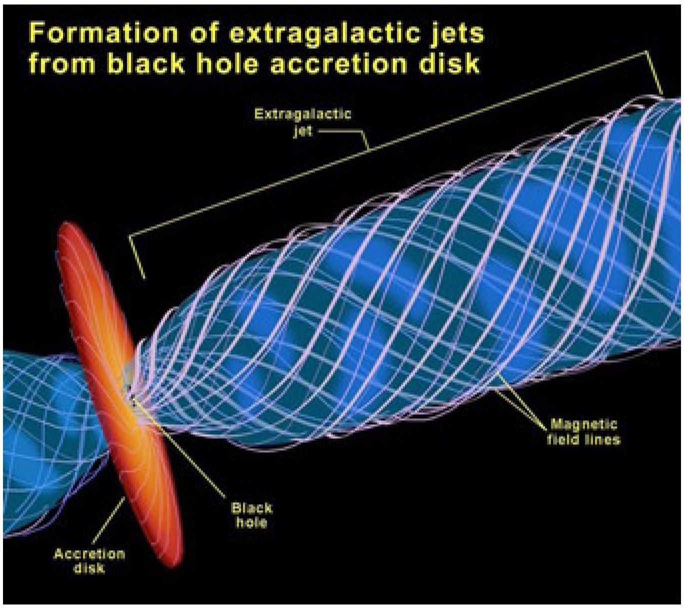
$$g_r{}^2 = \frac{r^2 + a^2 \cdot \cos^2(\theta)}{r^2 + a^2}\ ,\quad g_\theta{}^2 = r^2 + a^2 \cdot \cos^2(\theta)\ ,\quad g_\varphi{}^2 = (r^2 + a^2) \cdot \sin^2(\theta)\ .$$

A Kerr metrika nem ad számot a forgó fekete lyuk legfeltűnőbb jelenségéről.

Ez nem más, mint a forgó fekete lyuk két végénél kilépő két hosszú gázsugár, amelynek a neve: Jet. A Kerr metrika két szinguláris helye az eseményhorizont, ahol dr^2 együtthatója, azaz g_{rr} értéke végtelen, illetve az ergoszféra határa, ahol dt^2 együtthatója, azaz g_{tt} értéke 0.

A Kerr metrika azonban semmilyen szingularitást nem mutat a θ szög kis értékeinél!

Márpedig a tapasztalat azt mutatja, hogy a forgó fekete lyuk tengelyében közel fénysebességgel áramló és forgó anyag van!



Amint az ábra mutatja, a jet jelenségét az akkréciós korong által keltett erős mágneses terekkel magyarázzák. Én megmutatom, hogy ez a magyarázat nem a valóságnak megfelelő. Létezik egy egyszerűbb magyarázat is, amelyhez a forgó fekete lyuk által létrehozott gravitációs teret egy jobban megválasztott metrika segítségével adjuk meg.

Ennek a metrikának a neve: Kerr – Béta – metrika.

A Kerr – Béta – metrika egy háromdimenziós Béta vektor segítségével van megadva, ahol $\beta = (\beta_r, \beta_\theta, \beta_\varphi)$. A β_r, β_θ, β_φ komponensek a helykoordináták függvényei, de nem függenek az időtől, mert a forgó fekete lyuk gravitációs tere stacionáris.

Mivel a gravitációs tér tengelyszimmetrikus is, a komponensek nem függenek a φ szögtől sem. Ezért csak az r és a θ koordináták függvényei lesznek.

A Béta metrika alakja a következő:

$$ds^2 = (\beta^2 - 1)dt^2 + g_r \cdot \beta_r \cdot dr \cdot dt + g_\theta \cdot \beta_\theta \cdot d\theta \cdot dt + g_\varphi \cdot \beta_\varphi \cdot d\varphi \cdot dt + g_r{}^2 \cdot dr^2 + g_\theta{}^2 \cdot d\theta^2 + g_\varphi{}^2 \cdot d\varphi^2$$

Ahhoz, hogy a Béta metrika kielégítse az $R_{ik} = 0$ Einstein – egyenletet, a β vektornak a következő egyenleteket kell kielégítenie:

(E1) divgrad $\frac{\beta^2}{2}=0$, ahol $\beta^2 = \beta_r{}^2 + \beta_\theta{}^2 + \beta_\varphi{}^2$

(E2) rot β = 0

(E3) $\operatorname{div}\left(\beta\left(\beta \cdot \operatorname{grad}\frac{\beta^2}{2}\right)\right) = 2 \cdot \left(\operatorname{grad}\frac{\beta^2}{2}\right)^2$

(E4) $D^a{}_{mna} = 0$, ahol $D^a{}_{mnk} = D_k\left(\left(D_m\beta_n\right)\cdot\beta^a\right)$ egy negyedrendű tenzor,

D_k = kovariáns deriválás a k = 1, 2, 3 = r, θ, φ koordináták szerint,

β_n = alsóindexes Bétakomponens: $\beta_1 = g_r \cdot \beta_r$, $\beta_2 = g_\theta \cdot \beta_\theta$, $\beta_3 = g_\varphi \cdot \beta_\varphi$.

β^a = felsőindexes Bétakomponens: $\beta^r = \frac{\beta_r}{g_r}$, $\beta^\theta = \frac{\beta_\theta}{g_\theta}$, $\beta^\varphi = \frac{\beta_\varphi}{g_\varphi}$.

A kétszer szereplő a indexre pedig összegezni kell az a = 1, 2, 3 = r, θ, φ értékekre.

Ha a Béta metrikát a Kerr metrikával összevetjük, akkor még a következő

feltételeket kapjuk:

(C1) $\beta^2 = \frac{r_g \cdot r}{r^2 + a^2 \cdot \cos^2(\theta)}$

(C2) $\beta_\varphi = \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2} \cdot \sin(\theta)}$

(C3) β_r aszimptotikus alakja nagy r – ekre $\beta_r \approx \frac{r_g}{r}$.

(C4) Ha $r_g \cdot r = r^2 + a^2$, akkor $\beta_r = 1$.

(C5) $\beta_\theta{}^2$ az r nagy értékeire, és nem nagyon kis θ szögekre pozitív.

Számolással meggyőződhetünk róla, hogy a (C1) –ben megadott β^2

kielégíti az (E1) egyenletet.

A (C2) feltétellel megadott β_φ a rot β = 0 megoldásaként adódik.

A β_r és a β_θ az alábbi egyenletet elégíti ki:

(C6) $\partial_r\left(g_\theta\cdot\beta_\theta\right)=\partial_\theta\left(g_r\cdot\beta_r\right)$

És végül a $\beta^2=\beta_r{}^2+\beta_\theta{}^2+\beta_\varphi{}^2$ – ből, (C1) – ből és (C2) – ből adódó feltétel:

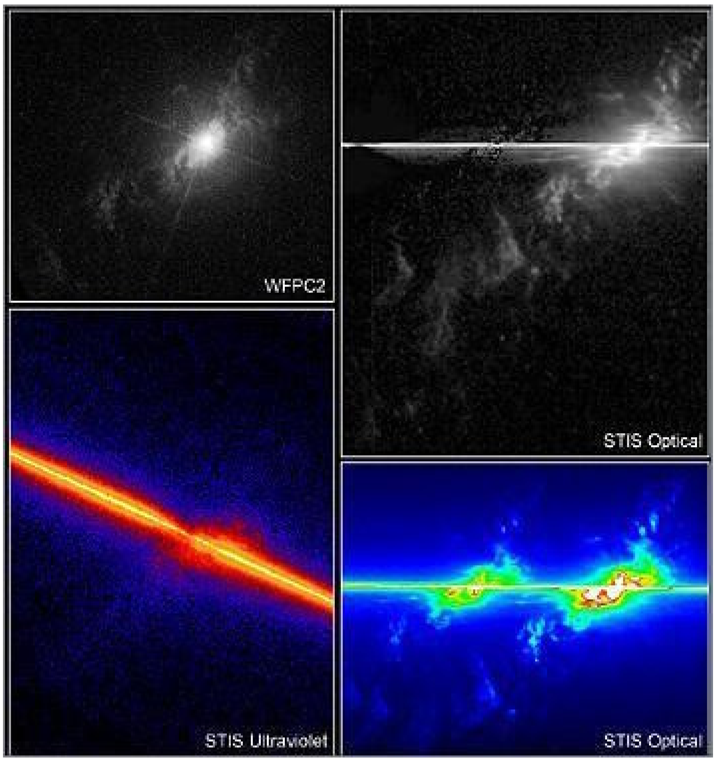
(C7) $\left(g_\theta\cdot\beta_\theta\right)^2+\left(r^2+a^2\right)\cdot\left(g_r\cdot\beta_r\right)^2=r_g\cdot r-\dfrac{\left(r^2+a^2\cdot\cos^2(\theta)\right)\cdot a^2}{\left(r^2+a^2\right)\cdot\sin^2(\theta)}$

Kis átalakítással ez így is írható:

(C7') $\left(g_\theta\cdot\beta_\theta\right)^2+\left(r^2+a^2\right)\cdot\left(g_r\cdot\beta_r\right)^2=r_g\cdot r+\dfrac{a^4}{\left(r^2+a^2\right)}-\dfrac{a^2}{\sin^2(\theta)}$

Ez így azért érdekes, mert a jobboldal szétválik egy csak r – től és egy csak θ - tól függő tagra. Ez valószínűleg nagyban megkönnyíti a β_r és a β_θ meghatározását.

Ez nekem eddig nem sikerült. De ez nem is baj, mert a mondandóm lényegét ez nem érinti.



A Seyfert-galaxis NGC-4151 centruma közelében egy szuper-masszív fekete lyuk van, melyből kettő ellentétes, forró gázsugár lép ki. A sebességek és tömegek meghatározásával a fekete lyuk nagyságára lehet következtetni.
50 millió fényév távolságban a Virgo Clusterban található az M 87 óriásgalaxis. Belőle egy 5000 fényév hosszú gázsugár nyúlik ki, melyben elektronok majdnem fénysebességre gyorsulnak, miközben szinkrotronsugárzást bocsátanak ki. Ilyen jelenségeket csak egy a galaxis köéppontjában lévő szupermasszív fekete lyuk tud létrehozni.

Most pedig rátérek a mondandóm lényegére.

Ez pedig nem egyéb, mint a (C2) feltétel elemzése.

A rot β = 0 egyenlet megoldása a β_φ komponensre: $\beta_\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{r^2+a^2}\cdot\sin(\theta)}$.

Jól nézzük meg, mit fejez ki ez az egyenlet!

Nagy r – ekre $\beta_\varphi \approx \dfrac{a}{r\cdot\sin(\theta)}$, és ez a kis θ szögeknél igen nagy értékeket vesz fel!

Valójában elegendő a $\beta_\varphi = 1$ értékig figyelemmel kísérni, mert ez már fénysebességgel való

körben áramlásnak felel meg!

Ha $\beta_\varphi = 1$, akkor $r = \dfrac{a}{\sin(\theta)}$, és ez a polárkoordinátákban egy keskeny, egyenletes

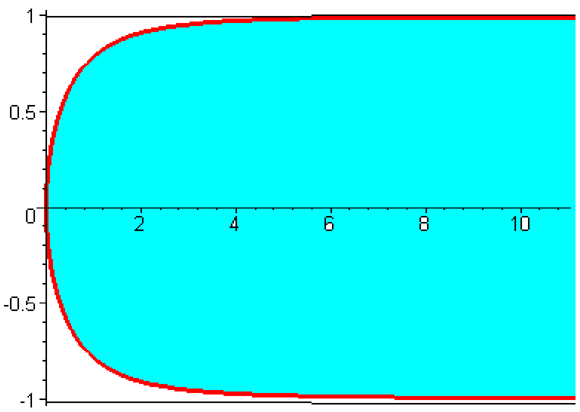
vastagságú cső egyenlete. A cső belsejében $\beta_\varphi > 1$, és ez már fizikailag értelmetlen.

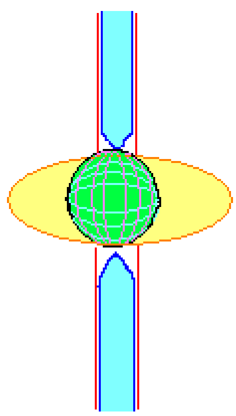
A cső egy olyan nyalábot hoz létre, amely fényévek százezreire is elnyúlik!

A Seyfert Galaxis példája mutatja, hogy ilyen képződmények a valóságban is léteznek!

Ha a pontos egyenletet nézzük, akkor $r^2 + a^2 = \dfrac{a^2}{\sin^2(\theta)}$, azaz $r = \dfrac{a\cdot\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.

```
plot([cos(x)/sin(x),x,x=0.1..3.05],coords=polar,thickness=3);
```





Ha megnézzük a forgó fekete lyukról készült képeket, azt látjuk hogy a jet pontosan így

elvékonyodik a fekete lyuk közelében. A jet pontos profiljának kialakulásában szerepet játszik

a β_r és a β_θ komponens is.

A Kerr – Béta – metrika kielégít még egy egyenletet:

(E5) div ($\beta \cdot$ div β) = 0

Ezzel az egyenlettel igazoltam azt, hogy β_θ nem nulla.

Ha ugyanis nulla lenne, akkor a β_r – re fizikailag abszurd megoldás adódna.

A Kerr – metrika alakja azt sejttette, hogy β_θ nulla, ugyanis a $d\theta^2$ együtthatója a görbületlen esetnek felel meg. Az (E5) egyenlet igazolja, hogy mégsem ez a helyzet.

Azt, hogy a forgó fekete lyuk esetében $\beta_\varphi \approx \frac{a}{r \cdot \sin(\theta)}$, még egy érdekes kísérlet igazolja, mégpedig az 1971 – ben elvégzett Hafele Keating kísérlet. Itt repülővel körberepülték a Földet, mégpedig egyszer keleti, egyszer nyugati irányba, és mérték a relativisztikus idődilatációt. Azt várták, hogy a Föld forgása miatt a két eredmény eltérő lesz, és így is lett! A Föld forgása miatt az egyenlítőn nyugvó megfigyelő 463 m/s sebességgel halad keleti

irányba. Ez a sebesség a keleti irányba tartó repülő sebességéhez hozzáadódik, a nyugati irányba tartó repülő sebességéből viszont levonódik. Az így számolt értékek azonban nem egyeztek a mért értékekkel. Ha viszont figyelembe vesszük, hogy a forgó Föld egy Kerr – Béta metrikát hoz létre, akkor a 463 m/s sebességből levonódik a β_φ komponens által létrehozott sebesség, ami azt jelenti, hogy a Föld a téridőt is magával forgatja.
A Föld esetén a = 3.272 méter, r = a Föld sugara. Behelyettesítve azt kapjuk, hogy az egyenlítőnél (ahol $\theta = 90°$, és így $\sin(\theta) = 1$) a téridő $\beta_\varphi \cdot c$ = 153 m/s sebességgel forog ugyancsak keleti irányba. Így a Földön nyugvó megfigyelő a téridőhöz képest csak 310 m/s sebességgel halad. A repülők sebességéhez is ezt a 310 m/s sebességet kell hozzáadni, vagy levonni. Ha így számoljuk ki a Hafele Keating kísérlet adatait, akkor a valóságban mért eredményhez közelálló értéket kapunk.
A Hafele Keating kísérlet tehát – amelyet annak idején kudarcnak könyveltek el – igazolja a Föld forgása által létrehozott Kerr – Béta metrikát. Tehát már 1971 –ben igazolta azt a nagyon fontos tényt, hogy a forgó testek a téridőt is magukkal forgatják – jóval a drága Gravity Probe B műhold fellövése előtt! És azt is igazolta, hogy a forgás által létrehozott általános relativisztikus effektusok jóval egyszerűbb eszközökkel is kimutathatók – jelesül a Gravity Probe B műhold helyett közönséges földi repülőgépekkel is!

A jet tehát olyan jelenség, amiről nem ad számot a Kerr – metrika, de a Kerr – Béta – metrika már igen. A Kerr – metrikára vonatkozó unicitási tétel azt sejtteti, hogy a Kerr – metrika és a Kerr – Béta – metrika matematikailag ekvivalens, azaz függvénytranszformációval egyikből a másik létrehozható. Ennek igazolása vagy cáfolása még a jövő feladata.

Most rátérek a forgó fekete lyuk másik feltűnő jelenségének, az akkréciós korongnak az elemzésére. Itt a legérdekesebb az, hogy az akkréciós korong nagyjából egy síkban van.

Ez a jelenség nem a fekete lyuk kizárólagos sajátja: tudjuk, hogy a Naprendszer bolygói is nagyjából egy síkban keringenek, és a Szaturnusz gyűrűi is egy síkban vannak.

Véletlen lenne ez? Megmutatom, hogy nem az, hanem a forgó fekete lyuk metrikájának egyenes következménye.

A téridő sebességét a c·β = v mennyiség jellemzi. A téridő stacionárius, azaz a sebesség (és így a metrika) nem függ explicite az időtől.

Emiatt a téridő gyorsulása így számolandó: A = (v, grad) v = $\mathrm{grad}\frac{v^2}{2} - v \times \mathrm{rot} v$.

Mivel az (E2) egyenlet szerint rot β = 0, ezért rot v is 0, emiatt $A = \mathrm{grad}\frac{v^2}{2}$ mindössze.

$\frac{v^2}{2}$ kifejezését viszont a (C1) feltételből egészen pontosan ismerjük, így A meghatározása egyszerű: $A = \left(A_r, A_\theta, A_\varphi\right)$, ahol

$$A_r = \frac{1}{g_1}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\frac{\beta^2}{2}, \qquad A_\theta = \frac{1}{g_2}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\beta^2}{2}, \qquad A_\varphi = \frac{1}{g_3}\cdot\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\beta^2}{2}.$$

$$A_r = \frac{c^2}{2}\cdot\frac{r_g\cdot\left(a^2\cdot\cos^2\theta - r^2\right)}{\left(r^2 + a^2\cdot\cos^2\theta\right)^2}\cdot\sqrt{\frac{r^2+a^2}{r^2+a^2\cdot\cos^2\theta}}, \quad A_\theta = \frac{c^2}{2}\cdot\frac{r_g\cdot r\cdot a^2\cdot\sin\left(2\cdot\theta\right)}{\left(r^2+a^2\cdot\cos^2\theta\right)^{\frac{5}{2}}}, \; A_\varphi = 0.$$

Nagy r – re $A_r \approx -\frac{c^2}{2}\cdot\frac{r_g}{r^2} = -\frac{GM}{r^2}$, ahogy azt Newtontól már tudjuk.

Viszont érdekes az A_θ megjelenése. Nagy r – re $A_\theta \approx \frac{c^2}{2}\cdot\frac{r_g\cdot a^2}{r^4}\cdot\sin\left(2\cdot\theta\right)$.

Ez így is írható: $A_\theta \approx \frac{G\cdot M\cdot a^2}{r^4}\cdot\sin\left(2\cdot\theta\right)$.

Ha összehasonlítjuk ezt az árapályerő kifejezésével: $F(x) = \frac{3\cdot G\cdot M\cdot m}{r^3}\cdot x$,

azt látjuk, hogy az árapályerő $\frac{1}{r^3}$ szerint változik, A_θ pedig $\frac{1}{r^4}$ szerint,

tehát egy kisebb erőről van szó.

Ám az, hogy ez az erő mégsem jelentéktelen, abból derül ki, hogy az akkréciós korong, a Szaturnusz gyűrű, és a Naprendszer is nagyjából egy síkban kering.

Ha kiszámoljuk az A_θ értékét, akkor azt látjuk, hogy ez egy mikrogravitációs effektus.

Ám csillagászati időléptékben nézve ez a kicsiny gyorsulás is nagyon gyors ellapuláshoz vezet.

Most figyelmezzünk a $\sin(2\cdot\theta)$ szorzótényezőre!

Az északi póluson $\theta = 0°$, itt az A_θ értéke is nulla.

Az A_θ értéke $45°$-ig monoton nő, majd $90°$-ig újra csökken, de mindvégig pozitív.

Ez azt jelenti, hogy az A_θ iránya az egyenlítő síkjának irányába mutat.

A déli féltekén az A_θ értéke negatív, $135°$-nál éri el a minimumot, majd $180°$-nál, a déli póluson újra felnő nullára. Az A_θ iránya tehát ebben az esetben is az egyenlítő síkjának irányába mutat.

Tetten értük tehát azt az erőt, mely a bolygókat, holdakat egy síkba kényszeríti!

A Kerr – Béta metrika tehát számot ad a forgó fekete lyuk két nagyon fontos jelenségéről. Az egyik a Jet, a másik az akkréciós korong. Számot ad az 1971-es Hafele Keating kísérlet eredményéről is. Méréssel tesztelhető előrejelzést ad arra nézve, hogy gyorsan forgó nagy tömegek tengelyében jelentős időanomáliák mérhetők, akár milliszekundumos értékben. Így mód nyílik arra is, hogy a forgó testek téridő – forgató hatását ne csak a drága Gravity Probe B műholddal tudjuk kimérni, hanem földi körülmények közt is, ráadásul nem kell még repülőgép se hozzá, elegendő egy nagytömegű, gyorsan forgó turbina is, aminek a tengelyében elhelyezett atomórával jelentős időanomáliákat mérhetünk ki. Lehet hogy atomóra helyett egy sokkal olcsóbb és egyszerűbb kvarcóra is megteszi! Ez azért is jó, mert kvarcórát már nagyon pici méretben is lehet kapni, így a mérés is sokkal pontosabb.

Kristóf Miklós 2008-12-27 . kristofmiklos@freemail.hu